نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄المحاضرة : الثانية   عنوان المحاضرة : جبر الأعداد العقدية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ الشكل الجبري للعدد العقدي

٢ـ تمثيل عدد عقدي في المستوي

٣ـ التمثيل الشعاعي للأعداد العقدية

مجموعة الأعداد العقدية : وجدنا في المحاضرة السابقة أن مجموعة الأعداد العقدية تعرف بالشكل:

$$\mathbb{C} = \{(\alpha, \beta) \; ; \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ حقل (تبديلي)

$\mathbb{C}$ لا يحوي قواسم للصفر

$$z_1 . z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \vee z_2 = 0$$

و لكن هل يمكن ترتيب المجموعة $\mathbb{C}$ كلياً ؟؟؟

في الحقيقة إذا نظرنا لها على أنها مجموعة مجردة فالإجابة ستكون **نعم** إذ يمكن تعريف علاقة ترتيب و **كلية** كم يلي :

$$\forall z_1 = (\alpha_1, \beta_1), z_2 = (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{C} \; ;$$

$$z_1 \leq z_2 \Leftrightarrow (\alpha_1 < \alpha_2) \vee (\alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 \leq \beta_2)$$

◄**مثال :** $(-1, 2) \leq (1, -3)$

كيف نقارن بين عنصرين وفق هذه العلاقة !!
بدايةً نقارن المسقط الأول مع المسقط الأول
فإذا كان المسقط الأول لأحد الثنائيتين أكبر من المسقط الأول للثانية يتم المطلوب
أما إذا تساوى المسقط الأول مع المسقط الأول نقارن المساقط الثانية

برهن على أن المجموعة مرتبة كلياً وفق العلاقة السابقة .

كيف يمكن اعتبار أن $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}$ بالرغم من أن عناصر $\mathbb{R}$ هي أعداد حقيقية و عناصر $\mathbb{C}$ ثنائيات!!!

في الحقيقة يمكن أن نقبل هذه العبارة إذا استطعنا إيجاد تماثل (تطبيق متباين و غامر و تشاكل) بين $\mathbb{R}$ و مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$ و لتكن A عندئذٍ : بما أن $A \subseteq \mathbb{C}$ و $A \cong \mathbb{R}$ يمكن أن نقبل أن $\mathbb{R}$ محتواة في $\mathbb{C}$

لنأخذ هذه المجموعة الجزئية $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ و لنعرف عليها التطبيق:

إن $\mathbb{R} \times \{0\}$ حقل جزئي من $\mathbb{C}$

$$f : \mathbb{R} \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha ,0) \to f(\alpha ,0) = \alpha$$

من السهولة أن نتحقق من أن هذا التطبيق يشكل تماثل حقلي من $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ إلى $\mathbb{R}$ (تحقق من ذلك!)

<u>الشكل الجبري (الديكارتي) للعدد العقدي :</u> ليكن لدينا العدد العقدي $\mathfrak{z} = (\alpha , \beta) \in \mathbb{C}$

$$\mathfrak{z} \Longrightarrow= (\alpha , \beta) = (\alpha ,0) + (0, \beta)$$

$$= (\alpha ,0) + (\beta ,0)(1,0)$$

$(\beta, 0)(0,1) =$
$(0-0, 0+\beta) = (0, \beta)$
حسب تعريف ضرب عددين عقديين

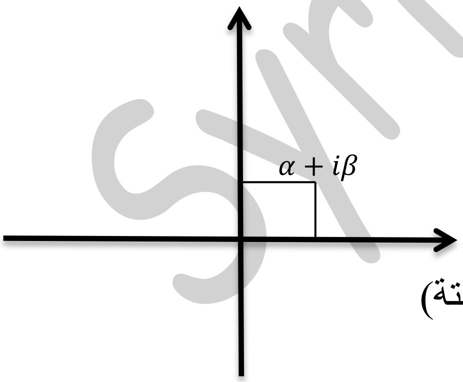
و لنرمز بـ i للعدد العقدي $(0 ,1)$ عندئذٍ و بالاستفادة من هذا الرمز و من التماثل المذكور آنفاً يكون :

$\mathfrak{z} = \alpha + \beta i$ "شكل جبري للعدد العقدي"

و لكن ماذا عن هذا العدد العقدي i !! و ماذا يحقق !! نلاحظ أنه:

$$i^2 = (0 ,1)(0 ,1) = (-1 ,0) = -(1,0) = -1$$

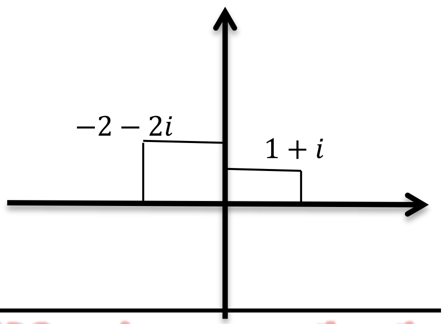
<u>تمثيل العدد العقدي في المستوي :</u>



نسمي المستوي التمثيل بالمستوي العقدي (مستوي غاوس)

نسمي المحور $0x$ بالمحور الحقيقي (لأن الأعداد الحقيقية تُمثّل عليه)

نسمي المحور $0y$ بالمحور التخيلي (لأنه سيتوضع عليه الأعداد العقدية البحتة)



- نسمي العدد الحقيقي α بالقسم الحقيقي للعدد العقدي $\mathfrak{z} = \alpha + \beta i$ ونرمز له بـ $\mathrm{Re}\mathfrak{z}$
- نسمي العدد الحقيقي β بالقسم التخيلي للعدد العقدي $\mathfrak{z} = \alpha + \beta i$ ونرمز له بـ $\mathrm{Im}\mathfrak{z}$

مثال : $\mathrm{Im}(2-3i) = -3$ & $\mathrm{Re}(2-3i)=2$

* لجمع عددين عقديين نجمع القسم الحقيقي من الأول مع القسم الحقيقي من الثاني و التخيلي من الأول مع التخيلي من الثاني

* عملية الضرب عبارة عن جداء قوسين بفك القوسين ونبدل $i^2 = -1$

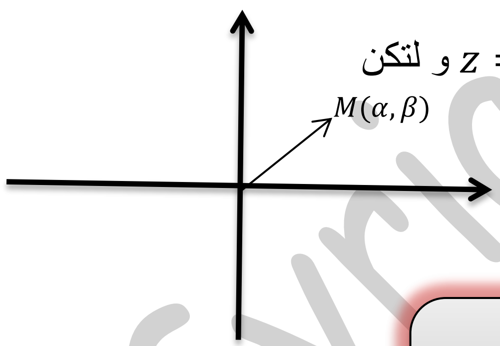
مثال : لنحسب الجداء التالي :

$$(-1+2i)(2-3i) = -2+3i+4i-6i^2$$

$$= 4+7i$$

*ولضرب عدد عقدي بعدد حقيقي نوزع الضرب على الجمع

مثال : $2(-1+3i) = -2+6i$



التمثيل الشعاعي للأعداد العقدية : ليكن لدينا العدد العقدي $z = \alpha + i\beta$ و لتكن النقطة الممثلة له في المستوي العقدي $M(\alpha,\beta)$ .... إن الشعاع OM يحدد تمثيلاً شعاعياً للعدد العقدي z و هذا التمثيل وحيد

إذاً أصبح لدينا ثلاث مفاهيم متكافئة

فكل عدد عقدي يقابل نقطة وحيدة في المستوي العقدي و التي تقابل شعاع موضع وحيد

و بالتالي أصبح بإمكاننا أن نقول عن عدد عقدي أنه نقطة أو أنه شعاع (متجه)

انتهت المحاضرة

إعداد: ميار طعمة – شهناز طاطيش – يمنى خرما

توضيح هام ^_^ !!!

هنالك فرق كبير بين قولنا إن $\mathbb{C}$ **حقل مرتب** و قولنا إن $\mathbb{C}$ **مجموعة مرتبة** بسبب ما يلي :

المجموعة المرتبة : هي مجموعة غير خالية يُعرّف عليها علاقة ترتيب (انعكاسية – تخالفية –متعدية)

أما الحقل المرتب : فهو بالإضافة إلى أنه مجموعة عُرّف عليها علاقة ترتيب ..يجب على هذه العملية أن تحافظ على **انسجام العمليات** المعرفة على هذا الحقل ((أي لا يكفي وجود علاقة ترتيب على الحقل لنقول عنه أنه مرتب .. بل يجب أن تحافظ على انسجام العمليات))

<u>نقصد بانسجام العمليات:</u>

١- الانسجام الجمعي :إذا كان $a \le b$ و c عنصر من الحقل فإن $a + c \le b + c$

٢- الانسجام الضربي: إذا كان $a \le b$ و c عنصر موجب فإن $ac \le bc$

و بالتالي $\mathbb{C}$ مجموعة مرتبة ((وفق علاقة الترتيب التي ذكرناها في هذه المحاضرة)) و لكن كحقل فهي ليست مرتبة وفق هذه العلاقة ((و يبرهن أنه لا يمكن إيجاد علاقة ترتيب تحافظ على الانسجام المطلوب ((

<u>مثال معاكس عن كون علاقة الترتيب السابقة لا تحافظ على انسجام العمليات:</u>

ليكن $z_1 = (2,4), z_2(1,-3)$ فحسب علاقة الترتيب المعرفة في المحاضرة يكون $z_2 \le z_1$ ((قارنا المساقط الأولى فتحققت العلاقة))

الآن لو ضربنا الطرفين بالعدد $(0,1)$ "لاحظ أنه موجب حسب علاقة الترتيب "

$$(2,4).(0,1) = (-4,+2)$$
$$(1,-3).(0,1) = (3,-1)$$

نلاحظ أنه $z_2 \le z_1 \nRightarrow z_2(0,1) \le z_1(0,1)$ " ضربنا طرفي المتراجحة بعدد عقدي موجب ولم تبقى المتراجحة صحيحة " و بالتالي الحقل غير مرتب إذ لا تحافظ علاقتنا على الانسجام الضربي .