10-10-2017

نظري

◄ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: الرابعة ◄ عنوان المحاضرة: المجموعات

**المستوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ تعاريف.

٢ـ قدرة المجموعات والمجموعات المتساوية القدرة.

٣ـ مبرهنات وامثلة D ;

**تعريف العنصرين المتقاربين :** لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبطة جزئيا وليكن $a, b \in P$ نقول إن $a, b$ متقاربين اذا كان $a \leq b$ أو $b \leq a$

**مثال:** كل من مجموعة الاعداد الطبيعية والصحيحة تحقق هذا الشرط :.... $3 < 2 < 1$

**تعريف المجموعة المرتبة كلياً** :نقول عن المجموعة المرتبة جزئياً انها مرتبة كلياً اذا كان كل عنصرين فيها متقاربين.

**مثال:** كل من مجموعة الاعداد الطبيعية والصحيحة مرتبة كلياً

**تعاريف:** لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئية و $A$مجموعة جزئية غير خالية في $P$ :

- نقول عن العنصر $a \in P$ أنه حد أعلى للمجموعة $A$ إذا حققت الشرط :
$$\forall x \in A \; ; \; x \leq a$$
- نقول عن العنصر $b \in P$ أنه حد ادنى للمجموعة $A$ إذا حققت الشرط :
$$\forall y \in A \; ; \; b \leq y$$

**ملاحظة:** الحد الأدنى (الأعلى) للمجموعة ليس بالضرورة ان ينتمي لهذه المجموعة . الحد الأدنى (الأعلى) ليس وحيد.

**مثال:** لتكن $P = N$ و $A = \{5,6,7,8,9,10\}$

ان 10,11,12 حدود عليا حيث $10 \in A$ و $11,12 \notin A$

ان 3,4,5 حدود دنيا حيث $5 \in A$ و $4,3 \notin A$

**اما العنصر الأصغر (الأكبر) يجب ان ينتمي للمجموعة.**

Syria Math Team

**تمهيدية:** ((وظيفة)) لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة كلياً و $a \in P$ عندئذٍ:

$a$عنصر اصغر $\Leftrightarrow$ $a$ عنصر أصغري في $P$ .

## البرهان :

$\Leftarrow$ لنفرض $a$ عنصر أصغر ولنبرهن أن $a$ عنصر أصغري .
نعلم أن كل عنصر أصغر هو عنصر أصغري فيتم المطلوب .

$\Rightarrow$ لنفرض $a$ عنصر أصغري ولنبرهن أن $a$ عنصر أصغر .
بما أن المجموعة مرتبة كلياً فإن كل عنصرين منها متقاربين وبما أن $a$ عنصر أصغري فإنه يحقق التعريف
$\forall x \in P : x \leq a \Rightarrow x = a$ وحسب تعريف العناصر المتقاربة يكون $a \leq x$
ومنه $a$ عنصر أصغر ويتم المطلوب :

## هناك مسلمات أساسية في الجبر والزمر .
## سنأخذ منها اثنان .

**تمهيدية زورن :** لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا إذا كانت كل مجموعة جزئية من $P$ غير خالية ومرتبة كليا تملك حد ادنى (اعلى ) عندئذ يوجد في $P$ عنصر أصغري ( أعظمي )واحداً على الأقل .

**موضوعة الاختيار :** لتكن $B$ مجموعة ما وغير خالية ولنفرض $P(B)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية في $B$
ولنفرض ان $S = P(B)\backslash\emptyset$ عندئذ يوجد تطبيق $f : S \to B$:
يحقق إنه: $\forall A \in S \; ; f(A) \in B$

**نص زورن وموضوعية الاختيار بدون برهان ولكن يمكن أن يأتي اكتب نص تمهيدية زورن وموضوعية الاختيار.**

**قدرة مجموعة:** نسمي كمية العناصر في أي مجموعة غير خالية $(A)$ بقدرة المجموعة $A$ ونرمز لها $card\ (A)$

- اذا كانت المجموعة $A$ منتهية فإن $card\ (A) \in N^*$
- اذا كانت المجموعة $A$ غير منتهية فإن $card\ (A) = \infty$

**تعريف:** نقول عن المجموعتين $A,B$ ان لهما نفس القدرة **او** $card(A) = card(B)$ اذا وجد تطبيق متباين وغامر بينهما ونرمز لذلك $A \sim B$

$$\Rightarrow A \sim B \Leftrightarrow card(A) = card(B)$$
$$\Leftrightarrow \exists f : A \overset{\text{متباين}}{\underset{\text{غامر}}{\to}} B$$

**تمهيدية:_**((وظيفة)) لتكن $\Sigma$ اسرة من المجموعات ان العلاقة $(\sim)$المعرفة على $\Sigma$ هي علاقة تكافؤ على$\Sigma$ .

## البرهان :

لنعرف العلاقة

$$A\sim B \Leftrightarrow card\ A = card\ B \Leftrightarrow \exists\ f: A \overset{\text{غامر}}{\underset{\text{متباين}}{\rightarrow}} B$$

- من اجل اي مجموعة $A \in \Sigma$ يوجد تطبيق مطابق : $f = I_A: A \longrightarrow A$

$$a \mapsto f(a) = a$$

وهو متباين وغامر فرضاً واستنادا لتعريف العلاقة $(\sim)$ فإن $(A\sim A)$ ومنه فإن $(\sim)$ انعكاسية .

- من اجل اي مجموعة $A,B \in \Sigma$ وبحيث $A\sim B$ فإنه يوجد تطبيق $f: A \overset{\text{غامر}}{\underset{\text{متباين}}{\rightarrow}} B$

وبما ان التطبيق $f$ تقابل فيوجد تطبيق عكسي وليكن $f^{-1}: B \overset{\text{غامر}}{\underset{\text{متباين}}{\rightarrow}} A$

وهذا يعني ان $B\sim A$ وبالتالي فالعلاقة $(\sim)$ تناظرية .

- من اجل اي مجموعة $A,B,C \in \Sigma$ وبحيث $A\sim B$ ~C فإنه يوجد تطبيق

$$f: A \overset{\text{متباين}}{\underset{\text{غامر}}{\rightarrow}} B$$

$$g: B \overset{\text{متباين}}{\underset{\text{غامر}}{\rightarrow}} C$$

ومنه فإن التطبيق $h = f\ °o\ g : A \overset{\text{متباين}}{\underset{\text{غامر}}{\rightarrow}} C$ وبما ان h تقابل فيؤدي الى ان $A\sim C$ وبالتالي العلاقة $(\sim)$ متعدية .

مما سبق نستنتج ان العلاقة $(\sim)$ هي علاقة تكافؤ على $\Sigma$.

**تعريف:** لتكن $A,B$ مجموعتان غير خاليتان نقول أن قدرة المجموعتين :

$$card\ A \leq card\ B \Leftrightarrow \exists\ f: A \overset{\text{متباين}}{\rightarrowtail} B$$

**مبرهنة : ((كانتور – برنشتاين )) :** لتكن $A\ ,B$ مجموعتان غير خاليتان إذا وجد تطبيق متباين $f: A \longrightarrow B$ وتطبيق متباين اخر $g: B \longrightarrow A$ عندئذ $A \sim B$ أي :

$$card\ A = card\ B$$

**تمهيدية :** ( **وظيفة** ) اثبت ان العلاقة " $\leq$ " المعرفة على أي مجموعة من القدرات هي علاقة ترتيب .

Syria Math Team

## البرهان :

- لأجل أي مجموعة يوجد ما يسمى التطبيق المطابق وهو يمثل تطبيق متباين

$$I_A : A \longrightarrow A$$

ومنه العلاقة " $\leq$ " علاقة انعكاسية .

- العلاقة " $\leq$ " متعدية لان :

$$card\ A \leq card\ B \iff \exists\, f : A \overset{\text{متباين}}{\rightarrowtail} B$$

$$card\ B \leq card\ D \iff \exists\, g : B \overset{\text{متباين}}{\rightarrowtail} D$$

$$f : A \overset{\text{متباين}}{\Longrightarrow} B \overset{\text{متباين}}{\Longrightarrow} D$$

ومنه $f : A \to D$ متباين $\Longleftarrow$ أن العلاقة متعدية .

لإثبات أن العلاقة " $\leq$ "تخالفيه نكتفي بنص مبرهنة **((كانتور – برنشتاين ))** وبما انه يوجد تطبيق $f$ متباين وتطبيق $g$ متباين وحسب المبرهنة فإن $card\ A = card\ B$ وبالتالي فالعلاقة تخالفية .

وبالتالي فإن $\leq$ هي علاقة ترتيب .

**تعريف:** نرمز لقدرة مجموعة الاعداد الطبيعية $N$ بالشكل:

$$card\ N = \aleph_0$$ ( وتقرأ الف صفر)

ونرمز لقدرة مجموعة الاعداد الحقيقية $R$ بالشكل:

$$card\ R = \aleph$$ ( وتقرأ الف)

**مبرهنة:** لتكن $A$ مجموعة ما. $P(A)$ أسرة كل المجموعات الجزئية في $A$ عندئذ :

$$card\ A < card\ P(A) \quad .... \quad (*)$$

## البرهان :

نميز حالتين :

1) $A = \emptyset$ في هذه الحالة $card\ A = 0 \Rightarrow card\ P(A) = 1$

$$0 < 1$$



Syria Math Team

2) عندئذ $A \neq \emptyset$ $f : A \to P(A)$

المعرفة بالشكل: $\forall\, a \in A\,; f(a) = \{a\}$

وهذه العلاقة تعرف تطبيق متباين وحسب التعريف فإن قدرة المنطلق اصغر او تساوي قدرة المستقر

$$card\ A \leq card\ P(A)$$

**((يجب ان تنفي المساواة لتتحقق المبرهنة))**

لنفرض جدلاً ان $card\ A = card\ p(A)$ وحسب التعريف يوجد تطبيق غامر $g : A \to P(A)$

لنأخذ المجموعة $H = \{a: a \in A\ ,\ a \notin g(a)\}$

- $H$ مجموعة جزئية في $A$ ومنه $H \subseteq P(A)$ .

إن $H \neq \emptyset$ لانه لو كان $H = \emptyset$ عند ئذ ولكون $g$ غامر فإنه يوجد $b \in A: g(b) = H = \emptyset$

اذاً لاتوجد عناصر لاتنتمي للصورة المباشرة لها ومنه فأن:

$$\Rightarrow b \in g(b) = \emptyset$$

وهذا تناقض لان $g$ غامر أي أن $H \neq \emptyset$ ،ومنه $\exists d \in A: g(d) = H$

عندها نميز حالتين:

١) $d \in H \Leftarrow d \notin g(d) = H$ .
٢) $d \notin H \Leftarrow d \in g(d) = H$ .

وهذا غير ممكن ، ومما سبق نجد ان هذا التطبيق غير موجود أي:

$$card\ A \neq card\ P(A)$$

ومنه $card\ A < card\ P(A)$ .

وهو المطلوب.

**تمرين :** أثبت أن : $card\ N^* = card\ Z$ أي ان المجموعة $Z$ قابلة للعد .

## الحل :

لنعرف العلاقة $f : Z \to N^*$ بالشكل التالي :

$$\forall\, n \in Z\ ;\ f(n) = \begin{cases} 2n+1 & n \geq 0 \\ 2|n| & n < 0 \end{cases}$$



Syria Math Team

إن $f$ تطبيق لأنه إذا كان $x,y\in Z$ بحيث $x=y$ عندئذ :

في حالة $x,y\geq 0$ ; $2x+1=2y+1$

$$\Rightarrow f(x)=f(y)$$

في حالة $x,y<0$ ; $2|x|=2|y|$

$$-x=-y$$

$$\Rightarrow f(x)=f(y)$$

ففي كلا الحالتين $f$ تطبيق .

لنبرهن على ان ن $f$ متباين ليكن $x,y\in z$ بحيث $f(x)=f(y)$ نميز ثلاث حالات :

- $x,y\geq 0 \Leftarrow 2x+1=2y+1 \Leftarrow x=y \Leftarrow f$ متباين
- $x,y<0 \Leftarrow 2|x|=2|y| \Leftarrow -x=-y \Leftarrow x=y \Leftarrow f$ متباين
- $x\geq 0\ ,y<0 \Leftarrow 2x+1=2|y| \Leftarrow 2x+1=-2y$

$\Leftarrow 2x+2y=-1 \Leftarrow x+y\in z=-\frac{1}{2}\notin z$ لن تتحقق ومنه فإن $f$ متباين

لنبرهن على ان ن $f$ غامر :

ليكن $z\in N^*$ عندئذ تميز حالتين :

* $z$ زوجي عندئذ : $-z\in Z$ و $-\frac{z}{2}\in Z$

$$f\left(\frac{-z}{2}\right)=2\left|\frac{-z}{2}\right|=z$$

* $z$ فردي ومنه $z-1$ عدد زوجي كما ان $0\leq z-1$ عندئذٍ $0\leq \frac{z-1}{2}\in Z$

ومنه

$$f\left(\frac{z-1}{2}\right)=2\left(\frac{z-1}{2}\right)+1=z$$

ومما سبق نجد أن التطبيق $f$ غامر .

وبالتالي فهو تقابل أي ان .

$$\Rightarrow card\ N^*=card\ Z$$

# انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا هيج

Syria Math Team