نظرية الاحتمالات

نظري

◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄المحاضرة الأولى عنوان المحاضرة : مفاهيم ومبادئ أساسية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- المفاهيم والمبادئ الأساسية لعلم الاحتمال وخصائصه .

2- بعض التعاريف والأمثلة .

3- النماذج الأساسية لتحديد فضاء العينة وعدته $|\Omega|$

مفردات المقرر:

1) مفاهيم والمبادئ الأساسية لعلم الاحتمال وخصائصه
2) الاحتمال الشرطي والاستقلال العشوائي
3) دراسة المتغيرات العشوائية
4) دراسة المتجهات العشوائية
5) دوال في المتغيرات العشوائية
6) الصفات العددية للمتغيرات والمتجهات العشوائية

الفصل الأول:

المفاهيم والمبادئ الأساسية لعلم الاحتمال وخصائصه

يرتكز علم الاحتمال على المفاهيم الاساسية التالية :

- التجربة Ω
- جبر الأحداث f
- حساب الاحتمال p تشكل معاً ثلاثية الفضاء الاحتمالي (Ω , f , p)

بعض التعاريف :

التجربة : هي كل عملية تؤدي إلى ملاحظة أو مشاهدة أو قياس .

التجربة العشوائية : هي تجربة تتحكم بمشاهدتها الصدفة أو التخمين .

فضاء العينة : هو مجموعة جميع النتائج الممكنة من تجربة ما ونرمز له عادة Ω ونرمز لعدد عناصرها ونقاطها $|\Omega|$ وتسمى أيضا (عدة Ω)

وكل نتيجة ممكنة للتجربة ندعوها نقطة العينة.

الحدث : هو كل مجموعة جزئية من Ω .

الحدث الابتدائي : هو كل حدث مؤلف من عنصر واحد أو نقطة واحدة فقط من العينة .

مثال : إلقاء قطعة نقود أو إلقاء حجر نرد وملاحظة النتائج لهذه التجربة نجد أن :

$$\Omega_1 = \{H, T\} \quad , \quad \Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

إذا اعتبرنا أن : $B = \{4,5,6\}$, $A = \{1,2,3\}$ أحداث من Ω_2

ومجموعات وحيدة العنصر هي $\{1\},\{2\},\{3\} \ldots\ldots \{6\}$ كلها أحداث ابتدائية من Ω_2

النماذج الأساسية لتحديد فضاء العينة وعدته $|\Omega|$

1) الحساب المباشر :

مثال (1) : تجربة إلقاء حجر نرد نجد أن : $\Omega = \{1,2,3, \ldots .6\}$

وعدد عناصر (Ω) هو $|\Omega| = 6$

مثال (2) : ولادة طفل وملاحظة جنسه يكون فضاء العينة $\Omega = \{B, G\}$

وعدد عناصر (Ω) هو $|\Omega| = 2$

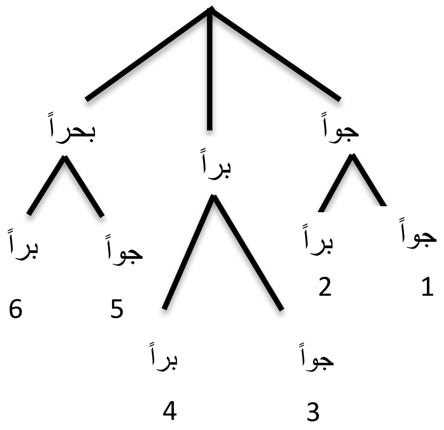
2) طرائق العد : (قاعدة $m \times n$)

أذا كان لدينا عمل يحتاج إلى مرحلتين الأولى تتم ب m طريقة والثانية تتم ب n طريقة

فيكون عدد الطرق لإتمام هذا العمل هو $m \times n$

مثال (1) شخص يعمل في بلد معين يمكن أن يصل لأقاربه براً أو جواً أو بحراً ومن بعد ذلك يمكن أن

يكمل سفره لأهله براً أو جواً عندئذ يمكن لهذا الشخص أن يصل إلى أهله بالطرق $6 = 2 \times 3$ لأن :



مثال (2) قاعة للاحتفالات لها أربعة أبواب بكم طريقة مختلفة يمكن الدخول إلى القاعة والخروج منها دون أن يستخدم نفس الباب ؟؟

الحل : الدخول ممكن بأربع طرق والخروج بثلاث طرق

عندئذ: $4 \times 3 = 12$

3) المبدأ الأساسي في العد (هي تعميم لقاعدة $(m \times n)$) :

يحتاج العمل إلى k مرحلة وكل مرحلة تحتاج إلى n_i طريقة حيث : $1 \le i \le k$ فيكون عدد الطرق المختلفة لإتمام العمل : $\boldsymbol{n_1 \times n_2 \times \dots \dots \times n_k}$

مثال كم عدداً مكوناً من ثلاث أرقام يمكن تشكيله من الأرقام $\{1,2,3,4,5\}$ على ألا يتكرر الرقم في أي عدد أكثر من مرة ؟؟

الحل رقم الآحاد يتم بخمسة طرق , رقم العشرات يتم بأربعة طرق , رقم المئات بثلاثة طرق

فيكون عدد الطرق الكلية هو : $5 \times 4 \times 3 = 60$ (عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها)

مثال بكم طريقة يمكن تصنيف مجموعة من الأشخاص ذلك حسب حالتهم المدنية والتي عددها 3 وحسب مهنهم وعددها 20 وحسب جنسهم عددها 2 وحسب مكان إقامتهم التي عددها 8 وحسب مؤهلهم العلمي وعددها 6 ؟؟

الحل إن عدد الطرق المختلفة لتصنيف المجموعة هو :

$$3 \times 20 \times 2 \times 8 \times 6 = 5760$$

حالة خاصة إذا كان لدينا تجربة نتائجها N وكررنا هذه التجربة n مرة بشكل مستقل في كل مرة من المرات السابقة عندئذ يكون عدد نتائجها الكلية لهذه التجربة $|\Omega| = (\mathrm{N})^{\mathrm{n}}$

مثال تجربة دراسة توزع الذكور لدى أسرة تمتلك ثلاث أطفال $\Longleftarrow$ $|\Omega| = 2^3 = 8$

$$\Omega = \{BBB, BBG, BGB, GBB, GGB, GBG, BGG, GGG\}$$

ملاحظة في حال تجربة ثنائية (لها نتيجتان) وكررنا بشكل مستقل هذه التجربة n مرة وبفرض Ω فضاء العينة فإن : $|\Omega| = 2^n$

4) العينات المرتبة : إذا كانت لدينا A مجموعة غير خالية وكان $r\epsilon\mathbb{N}^*$ فإن كل عنصر $(x_1, x_2 \dots . x_n)$ من A^r يدعى في علم الاحتمال والإحصاء عينة مرتبة من الحجم r مأخوذة من المجموعة A ويكون عدد العينات المرتبة يساوي :

- في حالة $|A| = n$ والسحب r مرة متتالية مع الإعادة $|\Omega| = |A|^r = n^r$

مثال : بكم طريقة يمكن أن نوزع n كرة على n صندوق ⟸ $|\Omega| = n^n$

- في حالة $|A| = n$ والسحب r مرة متتالية دون إعادة فأن :

تراتيب (r, n)

$$|\Omega| = n \times (n-1) \times \dots \dots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = p_r^n$$

وفي هذه الحالة تكون العناصر مختلفة وندعوها نسقاً من الحجم r ومأخوذة من A

5) التراتيب : يدعى ترتيب r من الأشياء المتمايزة (متبادلة) حيث نفرض إنه لدينا n شيء متمايز ونريد اختيار r شيئاً منها $(r \le n)$ ثم ترتيبها في متبادلة فيكون عدد الطرق المختلفة للقيام بهذا الترتيب هو:

$$p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad , \quad r \le n$$

وعندما يكون $n = r$ أي نريد ترتيب عناصر المجموعة بأكملها فإن عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك هو:

$$p_n^n = n \times (n-1) \times \dots \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

مثال لدينا مرجع مؤلف من ستة أجزاء نريد ترتيبه على أحد رفوف مكتبة لدينا ولكن لا يتوفر لنا سوى أربعة أماكن فبكم طريقة مختلفة يمكننا شغل هذه الأماكن الأربعة بأربعة أجزاء من الأجزاء الستة ؟؟

$$p_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2!} = 360 \quad \text{طريقة}$$

انتهت المحاضرة ... 💚

(كن بسيطاً ومسالماً ألا بإحلامك انتزعها من يد الحياة بكل قوتك)

إعداد: نور مهره **منى شغل** إيناس دليل