نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄المحاضرة : الأولى عنوان المحاضرة: مفاهيم عامة في المعادلات التفاضلية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- التعريف بالمقرر.

2- مفاهيم عامة في المعادلات التفاضلية.

3- مرتبة و درجة المعادلة التفاضلية.

4- المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى مع أيجاد الحل العام لها وبعض الأمثلة.

مفردات المقرر

الفصل الأول: ويشتمل على:

مفاهيم عامة-مرتبة المعادلة التفاضلية(المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى)

الفصل الثاني: ويشتمل على:

المعادلات التفاضلية التامة و المعادلات التفاضلية غير التامة و عوامل التكميل

الفصل الثالث: ويشتمل على:

المعادلات التفاضلية الخطية- المعادلات التفاضلية من مراتب عليا

لنبدأ الأن في الفصل الأول:

تعريف المعادلات التفاضلية:

هي كل علاقة تحتوي متغيرات المستقلة x والدالة المبحوث عنها y ومشتقات هذه الدالة.

ملاحظة:

1- عندما تكون الدالة تحوي متغير واحد فندعو عندها المعادلة التفاضلية بالمعادلة التفاضلية العادية

2- عندما تكون الدالة تحتوي على عدة متغيرات ندعوها بالمعادلة التفاضلية الجزئية

مرتبة المعادلة التفاضلية:

وهي أعلى مرتبة اشتقاق تحتويها المعادلة التفاضلية.

و بالتالي تكون المعادلة التفاضلية العادية هي العلاقة بين المتغير المستقل x و الدالة المجهولة لهذا المتغير و مشتقات هذه الدالة:

$$f(x, y, y', y'', y''', \ldots \ldots, y^n) = 0$$

*حيث أن: y تابع لـx

ملاحظة: يجب وضع مرتبة الاشتقاق بين قوسين إذا مثلتها بالأرقام بدل الفتحات

$$y^{(1)}, y^{(2)}$$

درجة المعادلات التفاضلية:

و هي أعلى درجة لأعلى مرتبة اشتقاق في المعادلة التفاضلية...

مثال توضيحي:

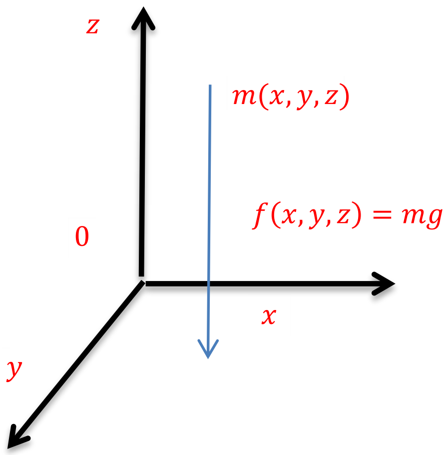
1- $y'^2 + yy' + 1 = 0$ وهي معادلة من المرتبة الأولى من الدرجة الثانية

2- $y'' + yy' + 3 = 0$ و هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية و من الدرجة الأولى

منشأ المعادلات التفاضلية:

أولا: منشأ هندسي: كثير من الخواص التي يحققها منحني ما أو عدة منحنيات يمكن التعبير عنها بمعادلة تفاضلية اعتمادا على خواص المماسات والنواظم والتقوس وهكذا....

ثانيا: منشأ ميكانيكي: فروع الميكانيك من حركة وتحريك و توازن مليئة بالمعادلات التفاضلية, فإذا فرضنا أن نقطة مادية في مستوي شاقولي $0xyz$ تخضع لقوة F و هذه النقطة ثقيلة (لها وزن) حيث ثقلها mg



فإن مركبات القوة لهذا المستوي:

$mx'' = 0$
$my'' = 0$
$mz'' = -mg$

نقوم بالمكاملة بالنسبة لـt :

$mx' = c_1$
$my' = c_2$
$mz' = -mgt + c_3$

ملاحظة: $f = ma$
القوة= التسارع ضرب الكتلة
و بالإسقاط على محاور الإحداثيات
أوجدنا أول ثلاثة معادلات
حيث المشتقات الثانية للمواضع هي
تسارعاتها على كل محور إحداثي

و بالمكاملة مجددا نحصل على معادلات الحركة:

$mx = c_1t + c_4$
$my = c_2t + c_5$
$mz = -\frac{1}{2}mgt^2 + c_3t + c_6$

حيث أن: $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$ هي ثوابت التكامل

ثالثا: كذلك فإن حذف الثوابت الاختيارية يتم بأيجاد علاقات لهذه الثوابت وحذفها و بشكل عام فعند حذفn ثابتا اختياريا يؤدي بنا الى معادلة تفاضلية من المرتبة n.

مثال توضيحي:

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3$$

نشتق:

$$y' = c_1e^x - c_2e^{-x}$$

$$y'' = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

$$y''' = c_1e^x - c_2e^{-x}$$

نلاحظ أن: $y' = y'''$ و منه بمكاملة الطرفين يكون لدينا $y = y'' + c$

إذن من حذف الثوابت حصلنا على معادلة تفاضلية التي تكون العلاقة الأولى حلاً لها.

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y)$$

نلاحظ أن:

1- إذا كانت الدالة f تابعة ل x فقط نجد أن: $dy = f(x)dx$ أي $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = f(x)$ نكامل فنحصل على

$$y = \int f(x)\, dx + c$$

2- إذا كانت الدالة f تابعة لy فقط نجد أن: $dx = \frac{dy}{f(y)}$أي $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = f(y)$ نكامل فنحصل على

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + c$$

3- وإذا كانت الدالة $f(x, y) = f(x).f(y)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = f(x).f(y)$$

و في هذه الحالة نسمي المعادلة التفاضلية بمعادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات.

تعريف:

الحل العام: الحل العام لمعادلة التفاضلية من المرتبة n هو كل حل من الشكل:

ديكارتيا $y = y(x)$

ضمني $f\left(x, y\right)$

وسيطي $y = y(t), x = x(t)$

أي أن الحل العام هو عبارة عن مجموعة منحنيات (كل ما تغير الثابت c تغير المنحني)

و هي عبارة عن أسرة من المنحنيات يحددها ثابت التكامل (c)

الحل الخاص: هو حل يحقق شروط إضافية سواء كان الحل معطى بشكل ديكارتي أو ضمني أو وسيطي

الحل الشاذ: هو الحل حيث في كل نقطة منه لا تتحقق فيه وحدانية الحل...
و هندسياً ذلك يوافق منحنيا تكامليا يحقق المعادلة التفاضلية و لكن غير موجود بأسرة المنحنيات في الحل العام للمعادلة التفاضلية ...

أمثلة:

أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية:

1- $(x^2+1)(y^2-1)dx + 2xy\,dy$

(الحل)

نقسم على $(y^2-1)x \neq 0$

هذا يعطي $\frac{x^2+1}{x}dx + \frac{2y}{y^2-1}dy = 0$

نكامل $\frac{1}{2}x^2 + \ln(x) + \ln(y^2-1) + \ln(c) = 0$

حيث $\ln(c)$ هو ثابت التكامل حيث يمكننا وضع c و لكن اخذ شكل اخر لسهولة حل المعادلة سنتعرف على ذلك في المحاضرات القادمة

$$\frac{1}{2}x^2 + \ln\left(x.(y^2-1)\right) + \ln(c) = 0$$

2- $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2}$

الحل

$$dy = \frac{-dx}{x^2}$$

نكامل $dy = \int -\frac{dx}{x^2}$ و منه فإن $y = \frac{1}{x} +$

3- $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

الحل

تصبح المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ و هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحول و بالتالي

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

و بالتالي بعد المكاملة $\arctan(y) = \arctan(x) + \arctan(c)$

4- $y' = 3x^2y$

الحل

تصبح المعادلة $\frac{dy}{dx} = 3x^2y$ و منه هي معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات

$$\frac{dy}{y} = x^2dx$$

نكامل $\ln(y) = x^3 + c$ أي $y = e^{x^3} + c$ و هو الحل العام

5- $xy' - y = 0$

الحل

تصبح المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ و منه

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

نكامل $\ln(y) = \ln(x) + \ln(c)$ أي $y = x.c$ و هو الحل العام

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله و ياسين الحلبي ورهف النقشي