◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: الخامسة عنوان المحاضرة: تتمة في الحركة الدورانية

ستتابع معكم زملائي في بحثنا عن الحركة الدورانية وسنأخذ مثال شامل عنها ..

الحركة المماسة لحركة دورانية حول محور ثابت

تعريف : إذا انعدمت سرع جميع نقاط مستقيم متماسك مع الجسم الصلب في لحظة واحدة فقط نقول إن حركة الجسم في هذه اللحظة تكون مماسة لحركة دورانية حول محور ثابت .

مثال :

تتحرك أسطوانة دائرية نصف قطرها (R) حول محورها الثابت ومعادلة حركتها هي :

$$\varphi = a\log\left(1+\frac{\omega_0 t}{a}\right) \quad ; a, \omega_0 \text{ ثوابت}$$

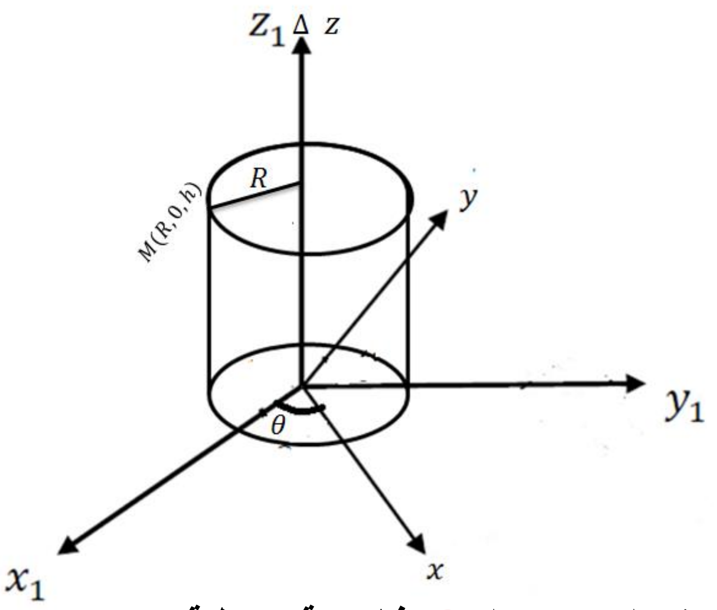
المطلوب :

1) عين شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي للجسم .
2) تعيين سرعة وتسارع نقطة من الجسم تبعد عن محور الدوران بالمقدار R .
3) تعين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع النظامي والتسارع الكلي .
4) تعيين القيمة العددية لسرعة والتسارع عندما t تسعى إلى اللانهاية.

الحل :

من نص المسألة نستنتج **نوع الحركة** وهي حركة دورانية ((تتحرك أسطوانة حول محور ثابت))
نختار **جملة المحاور الثابتة** (o_1, x_1, y_1, z_1) بحيث $(o_1 z_1)$ منطبق على محور الأسطوانة
وأيضا نختار **جملة المحاور المتماسكة** مع الأسطوانة (o, x, y, z) بحيث (oz) منطبق على محور الأسطوانة وأيضا (o_1) منطبق على (o) و حيث $\vec{k_1} = \vec{k}$
و (R) هو نصف قطر قاعدة الأسطوانة وليكن (h) ارتفاع الأسطوانة ..
نختار النقطة (M) من القاعدة العلوية بحيث مسقطها على (ox) و (oz) هو $M(R, o, h)$ وهي مركباتها على الجملة المتحركة .

ملاحظة : إذا لم يذكر في نص سؤال أي جملة نستخدم لنا الحرية في اختيار الجملة المناسبة .



تعيين شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي

$$\vec{\omega} = \omega\overrightarrow{k_1} = \varphi'\overrightarrow{k_1}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\omega} = a\frac{\frac{\omega_0}{a}}{1+\frac{\omega_0}{a}t}\overrightarrow{k_1} = \frac{\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{a}t}\overrightarrow{k_1}$$

$$\vec{\varepsilon} = \omega'\overrightarrow{k_1} = \frac{\frac{-\omega_0^2}{a}}{\left(1+\frac{\omega_0}{a}t\right)^2}\overrightarrow{k_1}$$

$$\Longrightarrow \vec{\varepsilon} = \frac{-\omega_0^2}{a\left(1+\frac{\omega_0}{a}t\right)^2}\overrightarrow{k_1}$$

بما أن $\vec{\omega},\vec{\varepsilon}$ **بجهتين متعاكستين** ((أي السرعة موجبة والتسارع سالب)) **فالحركة متباطئة** .

تعيين سرعة وتسارع نقطة (M) تبعد عن محور الدوران بالمقدار (R)

في " **الجملة المتماسكة** " R,h ثوابت غير تابعة للزمن للنقطة (M)

$$\forall M \in S\,;\overrightarrow{oM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \ \overrightarrow{oM} = R\vec{\imath} + h\vec{k}$$

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM} \Rightarrow \ \vec{v}(M) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R & 0 & h \end{vmatrix} = R\omega\vec{\jmath}$$

سرعة النقطة M

$$\boxed{\vec{v}(M) = R\omega\vec{\jmath}}$$

$$\Rightarrow \ \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{oM} + \vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ R & 0 & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & R\omega & 0 \end{vmatrix}$$

تسارع النقطة M

$$\boxed{\Rightarrow \ \vec{\Gamma}(M) = -R\omega^2\vec{\imath} + R\varepsilon\vec{\jmath}}$$

بحيث : $\overrightarrow{\Gamma_T}(M) = R\varepsilon\vec{\jmath} \quad , \quad \overrightarrow{\Gamma_N}(M) = -R\omega^2\vec{\imath}$

تعين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع النظامي والتسارع الكلي في " **الجملة المتماسكة** "

$$\left|\overrightarrow{\Gamma_T}(M)\right| = \sqrt{(R\varepsilon)^2} = R\varepsilon$$

$$\left|\overrightarrow{\Gamma_N}(M)\right| = \sqrt{(-R\omega^2)^2} = R\omega^2$$

$$\left|\vec{\Gamma}(M)\right| = \sqrt{R^2\omega^4 + R^2\varepsilon^2}$$
$$\Rightarrow \left|\vec{\Gamma}(M)\right| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

في " **الجملة الثابتة** " إن مسقط $M(R,0,h)$ على ox و oz هو :

$$\overrightarrow{oM} = R\vec{\imath} + h\vec{k} \qquad ; \qquad \vec{k} = \overrightarrow{k_1}$$
$$\overrightarrow{oM} = R(cos\varphi\overrightarrow{\imath_1} + sin\varphi\overrightarrow{\jmath_1}) + h\overrightarrow{k_1}$$
$$\overrightarrow{oM} = Rcos\varphi\overrightarrow{\imath_1} + Rsin\varphi\overrightarrow{\jmath_1} + h\overrightarrow{k_1}$$

يمكننا الاشتقاق مباشرة في الجملة الثابتة :

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = \begin{cases} x_1' = -R\omega sin\varphi \\ y_1' = R\omega cos\varphi \\ z_1' = 0 \end{cases}$$

$$|\vec{v}(\mathrm{M})| = \sqrt{R^2\omega^2\sin^2\varphi + R^2\omega^2\cos^2\varphi} = \omega R$$

وإما عن طريق تطبيق القانون التالي :

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath_1} & \overrightarrow{\jmath_1} & \overrightarrow{k_1} \\ 0 & 0 & \omega \\ Rcos\varphi & Rsin\varphi & h \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M) = -R\omega sin\varphi\overrightarrow{\imath_1} + \omega Rcos\varphi\overrightarrow{\jmath_1}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}(\mathrm{M})| = \sqrt{R^2\omega^2\sin^2\varphi + R^2\omega^2\cos^2\varphi} = \omega R$$

وهي تمثل عبارة شعاع السرعة في الجملة الثابتة.

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath_1} & \overrightarrow{\jmath_1} & \overrightarrow{k_1} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ Rcos\varphi & Rsin\varphi & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath_1} & \overrightarrow{\jmath_1} & \overrightarrow{k_1} \\ 0 & 0 & \omega \\ -R\omega sin\varphi & R\omega cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (-R\varepsilon sin\varphi\overrightarrow{\imath_1} + R\varepsilon cos\varphi\overrightarrow{\jmath_1}) + (-R\omega^2cos\varphi\overrightarrow{\imath_1} - \omega^2Rsin\varphi\overrightarrow{\jmath_1})$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = (-R\varepsilon sin\varphi - R\omega^2cos\varphi)\overrightarrow{\imath_1} + (R\varepsilon cos\varphi - \omega^2Rsin\varphi)\overrightarrow{\jmath_1}$$

عبارة شعاع التسارع في الجملة الثابتة :

$$\vec{\Gamma}(M) = \mathrm{R}\varepsilon(-sin\varphi\overrightarrow{\imath_1} + cos\varphi\overrightarrow{\jmath_1}) - \omega^2R(cos\varphi\overrightarrow{\imath_1} + sin\varphi\overrightarrow{\jmath_1})$$

ومنه التسارع المماسي هو :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_T}(M) = \mathrm{R}\varepsilon(-sin\varphi\overrightarrow{\imath_1} + cos\varphi\overrightarrow{\jmath_1})}$$

والتسارع الناظمي هو :

$$\overrightarrow{\Gamma_N}(M) = -\omega^2 R(\cos\varphi\,\vec{\imath_1} + \sin\varphi\,\vec{\jmath_1})$$

تعيين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع النظامي والتسارع الكلي في " الجملة الثابتة "

القيمة العددية للتسارع المماسي :

$$\left|\overrightarrow{\Gamma_T}(M)\right| = \sqrt{R^2\varepsilon^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = \varepsilon R$$

القيمة العددية للتسارع الناظمي :

$$\left|\overrightarrow{\Gamma_N}(M)\right| = \sqrt{\omega^4 R^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \omega^2 R$$

ومنه تكون القيمة العددية للتسارع الكلي هي :

$$\left|\vec{\Gamma}(M)\right| = \sqrt{\Gamma_T^2(M) + \Gamma_N^2(M)} \Rightarrow \left|\vec{\Gamma}(M)\right| = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \left|\vec{\Gamma}(M)\right| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

القيمة العددية للسرعة عندما (t) تسعى للانهاية

$$\vec{v}(M) = \omega R\vec{\jmath} \Rightarrow |\vec{v}(M)| = \omega R$$

إن $\omega \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ ومنه نجد أن $|\vec{v}(M)| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

القيمة العددية للتسارع عندما (t) تسعى للانهاية :

لدينا $\varepsilon \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ ومنه نجد أن :

$$\left|\vec{\Gamma}(M)\right| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

أي أن **الحركة متباطئة** إلى أن تنعدم .

انتهت المحاضرة

مَا أَخَذَ اللهُ عَلَى أَهْلِ الْجَهْلِ أَنْ يَتَعَلَّمُوا حَتَّى أَخَذَ عَلَى أَهْلِ الْعِلْمِ أَنْ يُعَلِّمُوا

إعداد: محمد علي فليون && لمى حبشية