نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄المحاضرة: الأولى عنوان المحاضرة : مراجعة

قام الدكتور في بداية المحاضرة بالتعريف بهذا المقرر حيث نوه إلى الارتباط بين هذا المقرر و مقرر التحليل ١ والذي درسناه في العام السابق ومن ثم نتوسع في مفاهيم جديدة كالجداءات الحقيقية اللانهائية ومتتاليات التوابع الحقيقية وبعدها سندرس بعض التكاملات الخاصة وهي عبارة عن مكاملة بعض التوابع والتي لا تملك تابعاً أصلياً ولنبدأ محاضرتنا الأن . ^_^

سنقوم بمراجعة مفهوم التقارب لمتتالية عددية حقيقية لانهائية باستخدام لغة الإبسلون ε

المتتالية العددية

لتكن : $a_1, a_2, \dots, a_n$ متتالية عددية حقيقية ، نقول عن المتتالية $\{a_n\}_{n\in N}$ لها نهاية a ونكتب $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ وذلك عندما يتحقق : $\forall \varepsilon > 0;\ N_\varepsilon \in N : \forall n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

معنى ذلك أنه من أجل كل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي $N\varepsilon$ بحيث كل العناصر التي دليلها أكبر أو يساوي N_ε فهي تحقق المتراجحة $|a_n - a| < \varepsilon$

◄**تنويه :** دليل العنصر هو n مثال : دليل a_2 هو $n=2$

◄**مثال :** $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ بحيث $n\in N$

نلاحظ أن : $\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = 1$ أي أنها متقاربة من الواحد مهما كان $\varepsilon > 0$:

يوجد عدد طبيعي $N_\varepsilon > 0$ بحيث يكون :

$$|a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n \Rightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

نختار $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < N\varepsilon \le n$

إذاً مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < N\varepsilon$ بحيث يتحقق :

$$|a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

◀ **تكريساً للفهم :** بما أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يتحقق ما سبق لنأخذ

◀ **مثال :** لنأخذ $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ فيكون $N_\varepsilon > \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

ولما كان N_ε عدد طبيعي يجب أن نأخذ أول عدد طبيعي أكبر من واحد والذي هو (2) أي أن $N_\varepsilon = 2$ من أجل $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$\Leftarrow |a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{2}$ حيث $N \ge 2$

أي أن كل العناصر التي دليلها أكبر أو يساوي 2 تحقق المتراجحة السابقة

وإذا كانت النهاية $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ موجودة نقول إن المتتالية متقاربة وإلا تكون متباعدة .

المتسلسلات :

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ متسلسلة حقيقية عددية لانهائية حيث نسمي a_n الحد العام و تتقارب هذه المتسلسلة عندما تتقارب متتالية المجاميع الجزئية منها $\{S_n\}_{n\in N}$ حيث : $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

إعداد: محمد أنس القزاز - عبد الكريم دباجة - لانا شهاب