/ /

19/10/2017 الخميس

المحاضرة الثالثة

طول المتجه :

ليكن $\vec{u}$ متجهاً مركباته (u_1, u_2, u_3) عندئذٍ يعرف طوله بالعلاقة :

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

متجه الموضع لنقطة :

p نقطة من الفضاء الثلاثي المزود بجملة محاور إحداثية $oxyz$

عندئذٍ يوجد ثلاثة أعداد حقيقية هي x, y, z حيث :

$$\vec{op} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

رمزه $\vec{r}$ أي :

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

كل نقطة يقابلها متجه موضع وحيد.

كل متجه $\vec{a}$ يقابله نقطة تحدد بالمساواة :

$$\vec{op} = \vec{a}$$

الدوال متجهية القيمة :

نأخذ قيمها في فضاء المتجهات دوال متجهية القيمة بمتغير حقيقي واحد ((المنحنيات))

و دوال متجهية القيمة بمتغيرين حقيقيين ((السطوح))

الدالة متجهية القيمة لمتغير حقيقي واحد :

$$\vec{r} : A \subseteq IR \longrightarrow IR^3$$

$$t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$$

مجموعة تعريف الدالة المتجهية هي تقاطع مجموعات تعريف مركباتها.

مفاهيم النهايات والاستمرار وقابلية الاشتقاق:

نهاية دالة متجهية الفيمة:

نقول عن المتجه $\vec{a}$ أنه نهاية للدالة $\vec{r}$ عند t إذا:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists\ \delta_\varepsilon : \forall t \in \underbrace{A \cap \left]t_0 - \delta_\varepsilon , t_0 + \delta_\varepsilon\right[}_{|t - t_0| < \delta_\varepsilon} :$$

$$: \| \vec{r}(t) - \vec{a} \| < \varepsilon$$

يبرهن أن لـ $\vec{r}$ نهاية عند t_0 $\Leftrightarrow$ لمركباتها نهاية عند t_0

ويكون:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} x(t) , \lim_{t \to t_0} y(t) , \lim_{t \to t_0} z(t) \right)$$

خواص نهاية دالة متجهية:

ليكن $\vec{w}(t)$ ، $\vec{v}(t)$ ، $\vec{u}(t)$ لها نهايات عند t_0 حيث t_0 من

لصاقة تقاطع مجموعات تعريف الدوال

① $$\lim_{t \to t_0} (\vec{u} + \vec{v}) = \lim_{t \to t_0} \vec{u} + \lim_{t \to t_0} \vec{v}$$

② $$\lim_{t \to t_0} (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \lim_{t \to t_0} \vec{u} \cdot \lim_{t \to t_0} \vec{v}$$

③ $$\lim_{t \to t_0} (\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)) = \lim_{t \to t_0} \vec{u}(t) \wedge \lim_{t \to t_0} \vec{v}(t)$$

• لتكن $\lambda(t)$ دالة سلمية لها نهاية عند t_0

عندئذ:

④ $$\lim_{t \to t_0} [\lambda(t) \cdot \vec{u}(t)] = \lim_{t \to t_0} \lambda(t) \cdot \lim_{t \to t_0} \vec{u}(t)$$

⑤ $$\lim_{t \to t_0} [\vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{w}(t)] = \left[\lim_{t \to t_0} \vec{u}(t) , \lim_{t \to t_0} \vec{v}(t) , \lim_{t \to t_0} \vec{w}(t) \right]$$

الاستقرار:

لتكن $\vec{r}$ دالة متجهية معرّفة في جوار لـ t_0

عندئذٍ نقول عن $\vec{r}$ إنها مستقرة عند t_0 إذا:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$$

نبرهن على أن $\vec{r}$ مستقرة إذا مركباتها مستقرة

خواص الاستقرار:

1. مجموع دالتين مستقرتين هو دالة مستقرة
2. جداء دالة سلمية مستقرة بدالة متجهية مستقرة دالة متجهية مستقرة
3. الجداء السلمي لدالتين متجهيتين مستقرتين هو دالة سلمية مستقرة
4. الجداء الخارجي لدالتين متجهيتين مستقرتين هو دالة متجهية مستقرة.
5. الجداء المختلط لثلاث دوال متجهية مستقرة هو دالة سلمية مستقرة.

قابلية الاشتقاق:

نقول عن $\vec{r}$ معرّفة في جوار لـ t_0 إنها قابلة للاشتقاق عند t_0 إذا:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$

أو:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$$

موجودة (محدود ضمناً)

نرمز لها بـ $\vec{r}\,'(t_0)$ أو $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$

وتكون قابلة للاشتقاق على مجال إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من هذا المجال.

نبرهن أن $\vec{V}$ قابلة للاشتقاق إذا إحداثياتها قابلة للاشتقاق
وأكثر من ذلك:

$$\vec{V}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

خواص قابلية الاشتقاق:

$\vec{w}$ و $\vec{V}$ و $\vec{u}$ دوال متجهية

$\lambda(t)$ دالة سلمية قابلة للاشتقاق

1) $(\vec{u}+\vec{V})' = u' + V'$

2) $(\lambda(t).\vec{u}) = \lambda'(t).\vec{u} + \lambda(t).\vec{u}'$ خاصة ليبنتز

3) $(\vec{u}.\vec{V})' = \vec{u}'.\vec{V} + \vec{V}'.\vec{u}$

4) $(\vec{u}\wedge\vec{V}) = \vec{u}'\wedge\vec{V} + \vec{u}\wedge\vec{V}'$ (الترتيب مهم.)

5) $[u, V, w]' = [u', V, w] + [u, V', w] + [u, V, w']$

اشتقاق تركيب دوال:

لتكن $t = \varphi(s)$ قابلة للاشتقاق عند s_0

ولتكن $\vec{V}$ قابلة للاشتقاق عند $t_0 = \varphi(s_0)$ عندئذٍ

$\vec{V}\circ\varphi$ قابلة للاشتقاق عند s_0

ويكون:

$$\underbrace{(\vec{V}\circ\varphi)}_{\text{تركيب دالة متجهية مع حقيقية}}'(s_0) = \vec{V}'(t_0).\varphi'(s_0)$$

التركيب هو دالة متجهية تتبع لمتغير حقيقي

المشتق من مراتب عليا :

نعرف المشتق من المرتبة n لدالة متجهية $\vec{V}$ كما في حالة الدوال الحقيقية ونرمز له بـ $V^{(n)}(t)$ ويكون :

$$\vec{V}^{(n)}(t) = (x^{(n)}(t), y^{(n)}(t), z^{(n)}(t))$$

الدوال من الصف C_n

* نقول عن دالة سلمية $\lambda(t)$ إنها من الصف C_n على مجال مفتوح إذا كان لها مشتقات حتى المرتبة n على دالة المجال وكانت تلك المشتقات مستمرة . ($\lambda^{(n)}(t)$ مستمرة)

C_0 هو صف الدوال المستمرة فقط

C_1 هو صف الدوال القابلة للاشتقاق حتى المرتبة الأولى وهكذا ---

- نقول عن $\lambda(t)$ إنها من الصف C_n عند t_0 إذا وجد جوار يحوي t_0 و λ من الصف C_n عليه

- ومن الصف C_n على مجال مغلق إذا وجد مجال مفتوح يحوي ذلك المجال و λ من الصف C_n عليه ---

ومنه نجد :

$C_0 \supseteq C_1 \supseteq \cdots\cdots$ (الاحتواء المعاكس غير صحيح $C_0 \not\subset C_1 \not\subset \cdots$)

- C_∞ : هو صف الدوال من الصف C_n مهما تكن n

انتهى

بيان البشاشي ٢٨