- تتمة طرائق البرهان :

الطريقة بواسطة التجزئة إلى حالات :

نقوم بتجزئة الكل إلى عدة مراحل و نقوم بإكمال مرحلة مرحلة.

مثال: أوجد النهاية $\lim_{n\to\infty} a^n = ?$; $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a|<1 \\ 1 & a=1 \\ \text{غير موجودة} \rightarrow \begin{cases} 1 & n \text{ زوجي} \\ -1 & n \text{ فردي} \end{cases} & a=-1 \end{cases} \Big\} |a| \le 1$$

$$\begin{cases} +\infty & a>1 \\ \text{غير موجودة} \rightarrow \begin{cases} +\infty & n \text{ زوجي} \\ -\infty & n \text{ فردي} \end{cases} & \end{cases} \Big\} a<-1$$

تذكرة

$\lim_{n\to 0} \frac{|n|}{n}$ ليس نهاية

$\lim_{n\to 0^+} \frac{|n|}{n} = 1$

$\lim_{n\to 0^-} \frac{|n|}{n} = -1$

طريقة الاستقراء الرياضي:

إذا كان لدينا قضية $p(n)$ و المطلوب إثبات أنها صحيحة عندئذٍ نتبع النقاط التالية :

1- نبين صحة القضية $p(n)$ من أجل القيمة الأولى ولتكن $n=1$ ليس بالضرورة

مثال: $2^n < n!$

نثبت $n \ge 4$

$n=1 \rightarrow 2^1 \overset{?}{<} 1!$

$1 < 2$ غير صحيحة

$n=2 \rightarrow 2^2 \overset{?}{<} 2!$

$4 < 2$ غير صحيحة

$n=3 \rightarrow 2^3 \overset{?}{<} 3!$

$8 < 6$ غير صحيحة

$n=4 \rightarrow 2^4 < 4!$

$16 < 24$ صحيحة.

Scanned by CamScanner

$(n \le k)$: $n=k$ من أجل $P(n)$ نفرض صحة هذه القضية

$n=k+1$ من أجل $P(n)$ نبرهن صحة القضية

عندئذ، القضية صحيحة $\forall n$

$$1+2+\dots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$n=10$

$$1+2+\dots+10 = \frac{10(11)}{2} = 55$$

مثال: ① أثبت صحة العلاقات التالية بالاستقراء الرياضي:

1) $1+2+\dots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$

$$T_1 = 1$$
$$T_2 = \frac{1(2)}{2} = 1$$
$$\Big\} \; T_1 = T_2 \quad 1=1$$

العلاقة صحيحة من أجل $n=1$

نفرض صحة العلاقة من أجل $n=k$

$$1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (*)$$

صحيحة $\forall n$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=k+1$ أي نبرهن أن

$$\underbrace{1+2+\dots+k}_{\text{من } (*)} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

T_1 :
$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

نوحد المقامات

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

T_2 :
$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\Rightarrow L_1 = L_2$$

العلاقة صحيحة $\forall n$

ALAWIA.net

Scanned by CamScanner

⑤ $1+nx \leq (1+x)^n \quad : n \in N$

$x \geq 0$

$n=1$ نبين صحة العلاقة (المتباينة) من أجل

$1+(1)x \leq (1+x)^1$

$1+x \leq 1+x$

$T_1 = 1+x$
$T_2 = 1+x$
$\Big\} \; T_1 = T_2$
$1+x = 1+x$

العلاقة صحيحة من أجل $n=1$.

نفرض صحة العلاقة من أجل $n=k$

$1+kx \leq (1+x)^k$

العلاقة صحيحة

نبرهن أن العلاقة صحيحة من أجل $n=k+1$

$1+(k+1)x \leq (1+x)^{k+1}$

$T_2 : (1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x)$

$\rightarrow (1+x)^k (1+x) \geq (1+kx)(1+x)$

$(1+x)^k (1+x) \geq 1+x+kx+kx^2$

$(1+x)^{k+1} \geq 1+(1+k)x+kx^2 > 1+(1+k)x$

العلاقة صحيحة $\forall n$

⑥ $f(n) = 7^n - 2^n$ يقبل القسمة على 5

Scanned by CamScanner

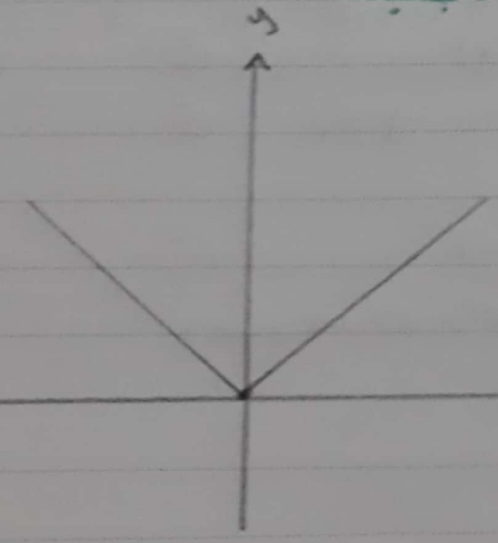
تذكير ومطلحات:

١- تعريف القيمة المطلقة.
٢- خواص القيمة المطلقة.
٣- المجالات في $\mathbb{R}$
٤- المجموعات المحدودة في $\mathbb{R}$ / الحد الأدنى - الحد الأعلى /
٥- أكبر عنصر في المجموعة max
أصغر عنصر في المجموعة min
٦- الحد الأعلى الأصغري للمجموعة Sup.
الحد الأدنى الأعظمي للمجموعة inf.
٧- خاصية أرخميدس.
٨- الخاصية الفرقية (الواحدية)
٩- المجموعة $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$
١٠- أمثلة وتمارين
١١- دستور ثنائي الحدين (الكرهي)
- متراجحة برنولي.
- المجال الهندسي.

تعريف القيمة المطلقة:

القيمة المطلقة لأي عدد ناتج عبارة عن عدد موجب.

موجب ← موجب سالب ← موجب



$$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow |x| \geq 0$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

مثال 2

$$|x+y| = \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x \geq -y \end{cases}$$

لاحظ كامل وليس فقط x

$$x+y < 0 \\ x < -y$$

خواص القيمة المطلقة:

① $|x| \geq 0$

② $|x| \leq k \;:\; k \in \mathbb{R}^+$

$-k \leq x \leq +k \;:\; x \in [-k, +k]$

③ $|x| \geq k \;:\; k \in \mathbb{R}^+$

$x \geq k$ أو $x \leq -k$

$x \in]-\infty, -k] \cup [k, +\infty[$

④ $|x-y| = |y-x|, \; |x+y| = |y+x|$

⑤ $|x+y| \leq |x| + |y|$ ← موجب دوماً

⑥ $|x| = 0 \iff x = 0$

⑦ $|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

اذا وفقط اذا ⑦

⑧ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

⑨ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \;:\; y \neq 0$

⑩ $|x-y|, \; |x+y|$

لا توجد علاقة واضحة بينهما

$|x| < 1$ مستقيمة محدودة قليلة

$|x| \geq 2$ صحيحة

إذا كان كلاهما موجب صحيحة

إذا كان كلاهما موجب أحدهما سالب يمكن أن تكون غير صحيحة

نفس الاشارات

$|x-y| > |x+y|$

$|x-y| < |x+y|$

لا توجد علاقة محددة.

Scanned by CamScanner

المجالات في $\mathbb{R}$:

① مفتوحة:

$]a, +\infty[$ ، $]a,b[$ ، $]-\infty, +\infty[$ ، $]-\infty,b[$

② مغلقة:

$$[a,b] = \{ a \leq x \leq b : x \in \mathbb{R} \}$$

③ نصف مفتوحة:

$[a,b[$ ، $]a,b]$ ، $]-\infty, b]$ ، $[a, +\infty[$

- المجموعة أوسع فكرة من المجال.
- المجموعة يمكن أن تكون اجتماع مجالين أو تقاطع مجالين بينما لا يمكن التعبير عن المجموعة بمجال واحد.
- المجال له شكل محدد.

مثال: $|x^2-1| > x^2-1$

$x^2-1 > x^2-1 \iff x^2-1 \geq 0$

وهذا مستحيل لا يوجد حلول.

$x^2-1 < 0$ (دراسة الإشارة)

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2-1=0 \Rightarrow x = \mp 1$

غير محققة | محققة | غير محققة

$$x \in]-1, +1[$$

المجموعات المحدودة في $\mathbb{R}$:

$A \subset \mathbb{R}$ (كلها)

نقول عن المجموعة A أنها محدودة في $\mathbb{R}$ إذا تحقق ما يلي:

$$\exists M > 0 , \forall x \in A \Rightarrow |x| \leq M$$

$A =]-2,-1[\cup]10,20[\cup \{3,4,5\}$

مثال: $\exists M = 20 , \forall x \in A \Rightarrow |x| = 20$ ←

ALAWIB.net

Scanned by CamScanner

$-2 \leq x \leq 2$ ← هذا ذي أعطي → هذا أكبر أصغري

يمكن كتابتها $-2 \leq x \leq 2$

المجموعة المحدودة من الأعلى :

$A \subset \mathbb{R}$

نقول عن A أنها محدودة من الأعلى إذا تحقق الشرط التالي

$\exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in A \Rightarrow x \leq b$ ← هذا أكبر

مثال:

$]-\infty, 1[\cup]-2, 2[$

أصغر هذا أكبر هو 2

المجموعة المحدودة من الأدنى:

$A \subset \mathbb{R}$

نقول عن A أنها محدودة من الأدنى بـ a ينتمي إلى A إذا تحقق الشرط:

$\exists a \in A : \forall x \in A \Rightarrow x \geq a$

مثال:

$]-7, 1[\cup]-2, 2[\cup]4, +\infty[$

أكبر الأدنى الأعطي هو -7

أكبر عنصر في المجموعة

$A \subset \mathbb{R}$

نقول M أنه أكبر عنصر في المجموعة A إذا تحقق ما يلي :

$\forall x \in A \Rightarrow x \leq M : M \in A$

مثال :

$[2, 3]$

أكبر عنصر في هذه المجموعة هو 3

$]2, 3[$

لا يوجد أكبر عنصر في هذه المجموعة.

Scanned by CamScanner

أصغر عنصر في المجموعة :

$A \subset \mathbb{R}$

نقول عن a أنه أصغر عنصر في المجموعة A إذا تحقق مايلي

$$\forall x \in A \Rightarrow x \geq a \quad ; \quad a \in A$$

$A = [2,3]$: $\max(A) = 3$ $\quad \min(A) = 2$

$[2, +\infty[$: $\max$ = يوجد ؟ $\quad \min = 2$

أي الأعلى، الأصغري :

هو عبارة عن عدد أعلى في هذه المجموعة وهو أصغر هذه الحدود. $A \subset \mathbb{R}$

نقول عن b_0 أنه عدد أعلى أصغري إذا كان عدداً أعلى كان أصغر هذه الحدود.

أي أن

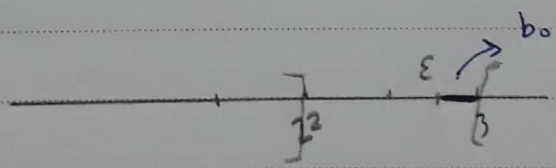
1) $\forall x \in A \Rightarrow x \leq b_0$

2) $b_0 - \varepsilon$ أيضاً

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > b_0 - \varepsilon$$

$A =]2,3[$

نفرض أن $\varepsilon = \frac{1}{4}$



$$x > b_0 - \varepsilon$$

انتهت المحاضرة

إعداد مرفت Syria math / بيان للأ