المحاضرة الأولى — أ.د 14/10/2017

(1) $2017, -10, 4, 1, -1, 0, 1, -1, 0, \ldots$

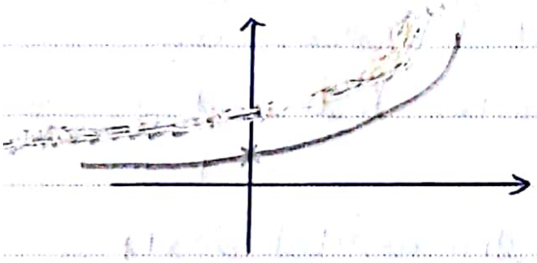
(2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

(3) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

$A_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \; ; \; n \geq 1 \qquad A_1 = 2 \qquad A_2 = 2.25 \qquad A_3 = 2.37$

$A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} e = 2.71828\,18284590 \ldots$

* ارسم الخط البياني للتابع $y = f(x) = e^x$ وانشره في جوار الصفر



$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$B_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \lim B_n = e - 1$$

* لدينا المتتالية $1, 2, 3, 5, 8, 13$

$u_0 = 1 \qquad u_1 = 1 \qquad u_2 = u_0 + u_1 = 2 \qquad u_3 = u_1 + u_2 = 3$

"متتالية فيبوناتشي"

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$

هل يمكنك أن تكتب u_n بدلالة n مباشرة $u_n = f(n)$ وعليك إيجاد f

الحل سنعطي

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

$$F_n = \frac{F_{-n}}{(-1)^{n+1}}$$

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \varphi'^n\right)$$

$$\varphi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad , \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

كلمات حول المتتاليات من (التحليل ١١)

١- المتتالية الأولى ليست متقاربة (محدودة)

2- " الثانية متقاربة ونهايتها تساوي 1 (محدودة ومتزايدة)

3- " الثالثة ليست متقاربة

٤- " الرابعة متقاربة ونهايتها e (محدودة ومتزايدة)

5- " الخامسة " " $e-1$

* تذكرة: نهاية المتتالية $\{x_n\}_{n\geq 1}$ هي l إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يحوي جميع عناصر المتتالية ما خلا عدداً منتهياً منه.

. إن لم تكن المتتالية متقاربة لا يمكن الحديث عن نهايتها إنما نتحدث عن النهاية العليا والنهاية الدنيا.

* اذكر كل ما تعرفه عن النهاية الدنيا والعليا.

- المتتالية الأولى: $\overline{\lim}\ x_n = 1$, $\underline{\lim}\ x_n = -1$, $\sup x_n = 2017$, $\inf x_n = -10$

- " الثانية: $\overline{\lim}\ y_n = 1$, $\underline{\lim}\ y_n = 1$, $\sup y_n = 1$, $\inf y_n = \frac{1}{2}$

- " الثالثة: $\overline{\lim}\ z_n = 1$, $\underline{\lim}\ z_n = -1$, $\sup = 1$, $\inf z_n = -1$

- كل متتالية جزئية يجب أن تسعى إليها، المتتالية الأولى ٥، ١، ١، -١ متكررة فكل مركز يسعى إلا ١ ولا يوجد حد أعلى منه و -١ حد أدنى ولا يوجد أكبر منه ولاحظنا فلا يؤثر الزيادة على التقارب.

المتتالية ذات الحدود المختلفة الموجبة ← ١ والسالبة ← -١

عن من الدكتور

* تمارين: ص 73 شوم

[1] خذ $X = \{a,b,c,d,e\}$ حدد فيما إذا كانت كل من الصفوف الآتية من أجزاء X تشكل تبولوجيا على X.

أ- $\tau_1 = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$

ب- $\tau_2 = \{X, \phi, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}\}$

جـ- $\tau_3 = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\} \{a,b,c,d\}\}$

[2] هذا تمرين ٤ ص 73 من سلسلة شوم.

اذكر جميع التبولوجيات الممكن تعريفها $X = \{a,b,c\}$ المكونة فقط من المجموعات أي τ لها الشكل $\tau = \{\phi, X, A, B\}$

حيث A, B عليك تعيينها.

أ- الجماعة τ_1 ليست طبولوجيا على X لأن اجتماع المجموعتين الأخيرتين $\{a,b,c\} \notin \tau_1$

ب- " τ_2 " " " " تقاطع " الثالثة والرابعة $\{a,b\} \notin \tau_2$

ج- الصف τ_3 يشكل طبولوجيا على X لأنه يحقق شروط التبولوجيا.

* الفضاء الطبولوجي:

(X,τ). $X \neq \phi$ ، τ صف من أجزاء X يحقق:

1- $\phi, X \in \tau$ 2- تقاطع منته 3- اجتماع

صف المجالات المفتوحة ليس طبولوجيا. نعتبر أي مجال يساوي طرفاه ϕ والتقاطع يبقى لكن اجتماع مجالين ليس بالضرورة مجال.

ما هي جميع التبولوجيات الممكنة * $X=\{a,b\}$

$\tau_1 = \{\phi, X\}$ $\tau_2 = \{\phi, X, \{a\}\}$ $\tau_3 = \{\phi, X, \{b\}\}$

$\tau_4 = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}\}$

τ_2 تدعى طبولوجيا (سيربنسكي)

* نضيف للتعاريف بالأدراك من أي مقرر.

المحاضرة الثانية 2017/10/18 أ ع

الطبولوجيا المعرفة على فضاء متري: هي مجموعة من أجزاء X، كل عنصر منه هو اتحاد لكرات مفتوحة ونرمز لها بـ τ_d

الطبولوجيا المألوفة على الفضاء المتري $(\mathbb{R}, |.|)$ هي جماعة من أجزاء $\mathbb{R}$ كل عنصر منه هو اتحاد لمجالات مفتوحة ومحدودة ونرمز لها بـ $\tau_{|.|}$

هنا $d(x,y) = |x-y|$

خذ المجموعة $A =]-\infty, 0[$

مفتوحة لأنه اتحاد لمجالات مفتوحة ومحدودة $A =]-\infty, 0[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]-n, 0[$

$B =]0, \infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]0, n[$

$\mathbb{R}^+ =]-\infty, \infty[=]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$

ليست مفتوحة لأنه لا يحوي أي مجال مفتوح $\{0\} =$

المجموعة المغلقة: هي تلك التي متممتها مفتوحة

$\mathbb{R}^*$ مفتوحة و $\{0\}^c = \mathbb{R}^*$ لأن $\{0\}$ مغلقة

مفتوحة $]0,1[\cup]1,2[\cup]2,3[\cup \dots$

مفتوحة $]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,2[\cup \dots = \mathbb{N}^c$

وبالتالي مجموعة الأعداد الطبيعية N مجموعة مغلقة.

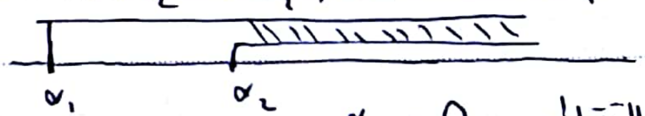
(انتبه) لتكن τ_∞ صنف المجموعات التي من الشكل $A=\emptyset$ أو $A=\mathbb{R}$ أو

اليمين $A=]\alpha,\infty[$

هل هذا الصنف طبولوجيا على R ؟

لنأخذ $A_1, A_2 \in \tau_\infty$ هل $A_1 \cup A_2 \in \tau_\infty$ وهل $A_1 \cap A_2 \in \tau_\infty$

$A_1 =]\alpha_1, \infty[$ $\quad A_2 =]\alpha_2, \infty[$ $\quad \alpha_1 < \alpha_2$



مغلقة بالنسبة للتقاطع $\alpha_2 = \cap$

$$A_1 \cap A_2 = A_3 =]\max(\alpha_1,\alpha_2), \infty[$$

$$A_1 \cup A_2 = A_4 =]\inf(\alpha_1,\alpha_2), \infty[$$

لنأخذ $A_\alpha \; ; \; \alpha \in L$

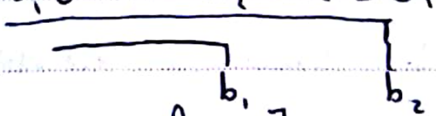
$$\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha =]\inf_{\alpha \in L} \alpha, \infty[$$

τ_∞ طبولوجيا

اليسار * لتكن $\tau_{-\infty}$ صنف المجموعات التي من الشكل $A=\emptyset$, $A=\mathbb{R}$, $A=]-\infty, b[$

هل الصنف $\tau_{-\infty}$ طبولوجيا على $\mathbb{R}$ ؟ نعم

لنأخذ $A_1, A_2 \in \tau_{-\infty}$ $\quad A_1 =]-\infty, b_1[$ $\quad A_2 =]-\infty, b_2[$



$$A_1 \cap A_2 = A_3 \; ; \; A_3 =]-\infty, \min[b_1,b_2][$$

$$A_1 \cup A_2 = A_4 \; ; \; A_4 =]-\infty, \sup[b_1,b_2][$$

$A_\alpha \; ; \; \alpha \in L$

$$\bigcup_{\beta \in L} A_\beta =]-\infty, \sup_{\beta \in L} \beta[$$

$]-1,1[$ ليست مفتوحة على الطبولوجيا اليمنى

* هل التقاطع المحدود لمجموعات مفتوحات هو مجموعة مفتوحة ؟!

في $\mathbb{R}$

الجواب: لا. $A = \bigcap_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ غير مفتوحه

مثال نصف مفتوح مجموعة غير مفتوحة $A = \bigcap_{n=1}^{\infty}]1, 2+\frac{1}{n}[=]1,2]$

* ماهو تعريف الصف المطرد وهل صف المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ هو صف مطرد؟! لا

الصف المطرد.

يقال عن عائلة من أجزاء X ولتكن $\mathcal{C}$ إنه صف مطرد إذا تحقق مايلي:

1. أي متتالية من المجموعات المتزايدة والمنتمية إلى $\mathcal{C}$ اتحادها ينتمي إلى $\mathcal{C}$

2. " " " المتناقصة " " " تقاطعها " " "

هل صف المجالات المغلقة في $\mathbb{R}$ هو صف مطرد؟ لا

- صف المجالات المفتوحة ليست صفاً مطرداً (الشرط الثاني غير محقق)

- " " المغلقة " " " " (الشرط الأول " ")

$\bigcup_{n=1}^{\infty} [+\frac{1}{n}, 1] =]0,1]$ وفقدنا الزاوية

* ليس لدي تبولوجيا $\beta \subseteq \mathcal{C}$

$X = ($ اتحاد لعناصر $\beta)$

$B_1, B_2 \in \beta \quad , B_1 \cap B_2 \in \mathcal{C}$

تعريف 1 ص 16: $\beta \subseteq P(X)$

$X = ($ اتحاد لعناصر $\beta)$

$B_1, B_2 \in \beta \quad , B_1 \cap B_2 = \beta$ اتحاد لعناصر في

$\mathcal{C}(\beta) =$ صف المجموعات التي كل منها اتحاد لعناصر من β

تعريف 2: $\Delta \subseteq \mathcal{C}$

Δ قاعدة جزئية لـ $\mathcal{C}$ $\Longleftrightarrow$ صف التقاطعات لعناصر Δ هو قاعدة لـ $\mathcal{C}$

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$\Delta_0 = \{\{1,2\}, \{1,3\}\} \subseteq P(X)$ ليست تبولوجيا

$B = \mathcal{J}_1 = \{ \phi , X , \{1,2\} , \{1,3\} \}$ ليست تبولوجيا

و قاعدة لتبولوجيا

$\mathcal{J}_2 = \{ \phi , X , \{1,2\} , \{1,3\} , \{1\} \}$ قاعدة

$\mathcal{J}_3 = \{ \phi , X , \{1,2\} , \{1,3\} , \{1\} , \{1,2,3\} \}$ تبولوجيا