نظري

◀ دكتور المادة: خليل تحيى

◀المحاضرة: الخامسة و السادسة عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

2-معادلة برنولي

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى

تعريف: نقول عن المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى أنها خطية إذا كانت من الشكل:

$$\boldsymbol{y' + p(x).y = q(x) \qquad (1)}$$

نلاحظ هنا أنه إذا كانت : $\boldsymbol{q(x) = 0}$ فإن $\boldsymbol{y' + p(x).y = 0}$

نسمي المعادلة التفاضلية متجانسة و بدون طرف ثاني.

و المعادلة مع طرف ثاني ندعوها معادلة تفاضلية غير متجانسة.

و لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية نتبع الخطوات التالية:

1) نوجد حل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$y' + p(x).y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x).y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x).dx$$

$$\Rightarrow ln|y| = -\int p(x).dx + ln|c| \Rightarrow ln|y| - ln|c| = -\int p(x).dx$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int p(x)\,.\,dx \;\Rightarrow\; \frac{y}{c} = e^{-\int p(x).dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = c.\,e^{-\int p(x).dx}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية (دون طرف ثانٍ).

2) نجعل الثابت c تابع ل x فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$y = c(x).\,e^{-\int p(x).dx} \dots (2)$$

ثمَّ نشتق الطرفين بالنسبة لـ x :

$$\Rightarrow y' = c'(x).\,e^{-\int p(x).dx} - c(x).\,p(x).\,e^{-\int p(x).dx} \dots (3)$$

والآن نعوض (2) و (3) في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ (1):

$$\Rightarrow c'(x).\,e^{-\int p(x).dx} - c(x).\,p(x).\,e^{-\int p(x).dx} + p(x)c(x).\,e^{-\int p(x).dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow c'(x).\,e^{-\int p(x).dx} = q(x) \;\Rightarrow c'(x).\frac{1}{e^{\int p(x).dx}} = q(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = e^{\int p(x).dx}.\,q(x)$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow c(x) = \int q(x).\,e^{\int p(x).dx}\,.\,dx + c_1$$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة (2) فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x).\,e^{\int p(x).dx}\,.\,dx + c_1\right]$$

أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الأتية:

$$1.\,(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)$$

$$2.\,y' + 2xy = 4x$$

$$3.\,y' + y\,tanx = \frac{1}{cosx}$$

التمرين الأول:

$$(1+x^2).y' - 2xy = (1+x^2)^2$$

الحل:

نقسم الطرفين على $0 \neq (1+x^2)$:

$$\Rightarrow y' - \frac{2x}{1+x^2}.y = 1+x^2 \quad **$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الشكل: $y' + p(x)y = q(x)$

لإيجاد الحل العام لها نتبع الخطوات السابقة:

1) نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}.y = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x}{1+x^2}.y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}.y \quad \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x}{1+x^2}.dx$$

$$\Rightarrow ln|y| = ln|1+x^2| + ln|c| \Rightarrow ln|y| - ln|c| = ln|1+x^2|$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{y}{c}\right| = ln|1+x^2| \Rightarrow \frac{y}{c} = 1+x^2 \Rightarrow y = (1+x^2)c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية (دون طرف ثانٍ).

و لإيجاد الحل العام للمعادلة مع طرف ثاني نجعل الثابت c تابع لـ x فنكتب:

$$y = c(x).(1+x^2) \ldots (1)$$

نشتق بالنسبة لـ x :

$$\Rightarrow y' = c'(x).(1+x^2) + 2x.c(x) \ldots (2)$$

نعوض (1) و (2) في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ $**$:

$$\Rightarrow c'(x).(1+x^2) + 2x.c(x) - \frac{2x}{1+x^2}.c(x).(1+x^2) = 1+x^2$$

$$\Rightarrow c'(x).(1+x^2) = 1+x^2 \quad \Rightarrow c'(x) = 1$$

نكامل فنجد: $c(x) = x + c_1$

نعوض في * $y = (x + c)(1 + x^2)$

التمرين الثاني

$$* \quad y' + 2xy = 4x$$

الحل:

نأخذ المعادلة من دن طرف ثاني و نحلها:

$$y' + 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \;\rightarrow\; \frac{dy}{y} = -2x\,dx$$

نكامل لنحصل على المعادلة: $\ln|y| = -x^2 + \ln|c| \;\rightarrow\; \ln\left|\frac{y}{c}\right| = -x^2$

و منها فإن الحل العام بدون طرف ثاني هو: $y = c.e^{-x^2}$

و الأن نجعل c تابع ل x :

$$y = c(x).e^{-x^2} \;...\,(1)$$

نشتق بالنسبة ل x:

$$y' = c'(x).e^{-x^2} - 2x.c(x).e^{-x^2} \;...\,(2)$$

نعوض (1) و (2) في المعادلة * مع طرف ثاني:

$$c'(x)\,e^{-x^2} - 2x\,c(x)e^{-x^2} + 2x\,c(x)e^{-x^2} = 4x$$

$$c'(x).e^{-x^2} = 4x \;\rightarrow\; c'(x) = 4x.e^{x^2}$$

و الأن نكامل الطرفين:

$$c(x) = 2e^{x^2} + c_1$$

نعوض في (1):

$$y = (2e^{x^2} + c)e^{-x^2}$$

و هو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية.

التمرين الثالث

$$y' + y.\tan x = \frac{1}{\cos x}$$

الحل:

هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الشكل: $y' + p(x)y = q(x)$

لإيجاد الحل العام لها نتبع الخطوات السابقة ذاتها:

نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$y' + y.\tan x = 0 \Rightarrow y' = -y.\tan x = -y.\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y.\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x}.dx$$

$$\Rightarrow ln|y| = ln|\cos x| + ln|c| \Rightarrow ln|y| - ln|c| = ln|\cos x|$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{y}{c}\right| = ln|\cos x| \Rightarrow \frac{y}{c} = \cos x \Rightarrow y = c.\cos x \ldots (1)$$

نوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية (مع طرف ثانٍ):

ومن أجل ذلك نجعل الثابت c تابع لـ x فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$y = c(x).\cos x \ldots (*)$$

ثمَّ نشتق بالنسبة لـ x :

$$\Rightarrow y' = c'(x).\cos x - \sin x.c(x)$$

والآن نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ:

$$\Rightarrow c'(x).\cos x - \sin x.c(x) + c(x).\sin x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow c'(x).\cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow c'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow c(x) = \tan x + c_1$$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة $(*)$ فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$y_2 = (\tan x + c_1).\cos x = \sin x + c_1.\cos x$$

ملاحظة: تسمى طريقة تحويل الثوابت معادلة برنولي:

$$y' + p(x)y = q(x) \ldots (1)$$

نفرض أن $y = u.v$ حيث $v = v(x)$ و $u = u(x)$

نشتق y لنحصل على $y' = u'v + v'u$

نعوض في (1): $u'v + uv' + p(x)u.v = q(x)$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x) \ldots (2)$$

نفرض أنّ:

$$v' + p(x)v = 0$$

و هي معادلة قابلة لفصل المتحولات

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v \;\to\; \frac{dv}{v} = -p(x)dx \to \text{نكامل} \to \ln|v| = -\int p(x)dx + \ln|c|$$

و منه فإن $v = c.e^{-\int p(x)dx} \ldots *$

نعوض * في (2)

$$c.e^{-\int p(x)dx}.\frac{du}{dx} + 0 = q(x)$$

$$\frac{du}{dx} = q(x).\frac{1}{c}.e^{\int P(x)dx}$$

و منه فإن: $du = q(x).\frac{1}{c}.e^{p(x)dx}\,dx$

$$u = \int q(x).c_1.e^{p(x).dx}.dx$$

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية (بالاعتماد على طريقة برنولي).

$$y' - \frac{2x}{x^2+3}y = (x^2+3)cosx \ldots (1)$$

الحل:

نفرض أن $y = u.v$ حيث $v = v(x)$ و $u = u(x)$

نشتق y لنحصل على $y' = u'v + v'u$

و نعوض في (1) لنحصل على:

$$u'v + v'u - \frac{2x}{x^2+3} u.v = (x^2+3)cosx$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+3} v\right) = (x^2+3)cosx \dots *$$

نفرض $v' - \frac{2x}{x^2+3} v = 0$

منه $\frac{dv}{v} = \frac{2x}{x^2+3} dx$

$$\ln|v| = \ln|x^2+3| \quad \rightarrow \quad v = (x^2+3)$$

و منه نعوض في * لتصبح المعادلة

$$u'(x^2+3) = (x^2+3)cosx$$

نكامل $du = cosx\, dx \quad \rightarrow \quad u = sinx + c$

و منه $y = u.v$ فإن المعادلة تصبح كلاتي:

$$y = (sinx + c)(x^2+3)$$

و هو الحل العام المطلوب.

مثال:

$$y' - \frac{1}{x} y = x \dots (1)$$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية (بالاعتماد على طريقة برنولي).

الحل:

نفرض أن $y = u.v$ حيث $v = v(x)$ و $u = u(x)$

نشتق y لنحصل على $y' = u'v + v'u$

و نعوض في (1) لنحصل على:

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}u\,v = x$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = x \ldots *$$

و لتكن

$$v' - \frac{1}{x}v = 0$$

و منه فإن

$$v = x$$

نعوض في * لتصبح المعادلة

$$\frac{du}{dx}x = x \quad \Rightarrow \quad u = x + c$$

و الأن بما أن $y = u\,v$ نعوضها بالمعادلة الاخيرة

$$y = x^2 + c(x)$$

تنويه: سنقوم بإدراج ملحق يضم الوظائف التي أعطانا إياها الدكتور خليل يحيى بإذنه تعالى

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله وياسين الحلبي ورهف النقشي

تعلموا العلم و علموه الناس و تعلموا الوقار و السكينة
وتواضعوا لمن تعلمتم منه و لمن علمتموه ولا تكونوا جبارة العلماء فلا يقوم جهلكم بعلمكم