نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الثالثة عنوان المحاضرة: مبرهنات في تقارب الجداء اللانهائي

لقد قمنا في المحاضرة السابقة بدراسة ما يسمى بالجداءات اللانهائية وقد قام الدكتور في هذه المحاضرة بمراجعة الأفكار الأساسية للمحاضرة السابقة ومن ثم أعطى العديد من المبرهنات والتي تفيد في دراس تقارب الجداء اللانهائي .

تعرفنا على الجداءات اللانهائية وقلنا إنها تكتب على الشكل $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ ولدراسة تقاربها نشكل متتالية الجداء الجزئي $\{P_n\}_{n\in N}$

حيث أن : $p_n = P_1 . P_2 . P_3 . \ldots\ldots P_n$

وقلنا أنه إذا كانت النهاية : $\lim_{n\to\infty} P = p$ موجودة فإن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ متقارب وقيمته p

أي $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$

والجداء الجزئي أيضا يكتب بالشكل : $\mathbf{p_n} = \prod_{k=1}^{n} p_K$

والجداء الباقي $\pi_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} p_K$

وتعرفنا على الخاصة : (خاصية الجداء الباقي) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P_n \, . \pi_n$

كما تناولنا المبرهنة التالية:

مبرهنة 1 :

إذا كان الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ متقارباً من p فإن جميع الجداءات الباقية تكون متقاربة $\pi_n = \prod_{K=n+1}^{\infty} p_K$ متقارب .

واذا كان أحد الجداءات الباقية متقارب $\boldsymbol{\pi_n}$ فإن الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ متقارب .

لنبدأ محاضرة اليوم :

مبرهنة 2 :

إذا كان الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ متقارب فإن نهاية الجداء الباقي π_n تساوي الواحد أي أن :

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n = 1$$

البرهان :

لدينا فرضاً : $lim_{n\to\infty} P_n = p$ (كون الجداء متقارب فإن نهاية الجداء الجزئي موجودة وهي p)

ونعلم أن : $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{p}_n = \mathbf{P}_n . \boldsymbol{\pi}_n = \mathbf{p}$

نعزل ونأخذ النهاية التالية : $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{P}_n} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{P}} = \mathbf{1}$

مبرهنة 3 (دون برهان ^^) :

إذا كان الجداء غير المنتهي متقارباً $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ فإن نهاية الحد العام p_n يسعى إلى الواحد عندما $n \to \infty$

اي أن : $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$

مبرهنة 4 :

الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ هو أن تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ وإذا كان مجموع المتسلسلة يساوي S فإن قيمة الجداء هي $p = e^s$

البرهان :

نأخذ S_n مجموع n حداً من المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ اي :

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \ln p_k = \ln(p_1) + \ln(p_2) + \cdots + \ln(p_n)$$

حسب خواص اللوغاريتم: $\ln x + \ln y = \ln(x+y)$ يكون :

$$S_n = \ln(p_1 . p_2 \dots p_n)$$

$$\Longrightarrow S_n = \ln p_n \Rightarrow p_n = e^{S_n}$$

(أخذنا الأساس e للطرفين وذلك للتخلص من اللوغاريتم ^^)

اذا كانت المتسلسلة متقاربة و مجموعها S حيث $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ فإن :

$$\lim_{n\to\infty} e^{S_n} = e^{S} = \mathrm{p}$$

إذاً نجد أن الجداء الغير منتهي متقارب وبالعكس إذا كان الجداء الغير المنتهي متقارب وقيمته p حيث :

$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n = \mathrm{p}$ فإن النهاية

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_n = \lim_{n\to\infty} \ln \mathrm{p}_n = \ln \mathrm{p}$$

أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \mathrm{p}_n$ متقاربة من S حيث أن $\mathrm{S} = \ln \mathrm{p}$

◀ **ملاحظة** : بما أن المبرهنة عبارة عن شرط لازم وكافي إذاً لإثباتها نتبع خطوتين الأولى هي أن نعتبر الطرف الأول فرض والثاني طلب والخطوة الثانية بالعكس

تذكرة في خواص اللوغرتم :

$1 - \ln(\mathrm{a.b}) = \ln \mathrm{a} + \ln \mathrm{b}$

$2 - \ln\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right) = \ln \mathrm{a} - \ln \mathrm{b}$

$3 - \ln(\mathrm{a}^{\mathrm{n}}) = \mathrm{n}\,.\ln \mathrm{a}$

$4 - \ln^{\mathrm{n}}(\mathrm{a}) = (\ln \mathrm{a})^{\mathrm{n}}$

◀ لدراسة الجداءات غير المنتهية $\prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{p}_n$ نأخذ $\mathrm{p}_n = 1 + a_n$

ليصبح الجداء غير المنتهي : $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$

والمتسلسلة : $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$

مبرهنة 5 :

إذا كان لدينا $(a_n > 0)$ أو $(a_n < 0)$ على الأقل من أجل قيم كبيرة للعدد الطبيعي n فإن الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$

هو تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

البرهان :

نفرض أن الجداء : $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ متقارب فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ متقاربة

بما أن الجداء متقارب حسب المبرهنة الثالثة فإن $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)=1$

أي $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1>0$$

وحسب معيار نهاية النسبة نجد أن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$

من نوع واحد أي متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً

وبما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ متقاربة فإن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة

وبالعكس يبرهن بنفس الطريقة

توضيح : عندما أخذنا $\lim_{n\to\infty}\ln(1+a_n)=1$ فإنه حكماً $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ لكي يتساوى الطرفين

وعندما أخذنا معيار نهاية النسبة أخذنا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ كما في السابق وكون $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

فاصبح لدينا : $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$ لأنها أصبحت من الشكل $\left(\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1\right)$ (نهاية شهيرة)

مبرهنة 6 :

الشرط اللازم والكافي كي تكون قيمة الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{p_n}$ أو $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$

تساوي الصفر هو أن تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\mathrm{p}_n$ أو $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$

متباعدة إلى $-\infty$

بوجه خاص يتم هذا إذا كان $a_n<0$ والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\mathrm{p_n}$ متباعدة

توضيح : إن مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\mathrm{p}_n$ هو $\mathrm{s}=\ln\mathrm{p}\Rightarrow\mathrm{p}=e^s$

وعندما $s\to-\infty$ يكون $\mathrm{p}=0$

التقارب المطلق للجداء

◄**تعريف :** يكون الجداء غير المنتهي متقارب بإطلاق اذا كانت المتسلسلة التي حدودها لوغاريتمات $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ متقاربة بإطلاق

مبرهنة 7 :

الشرط اللازم والكافي للتقارب المطلق للجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ بإطلاق هو تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بإطلاق .

مثال : ادرس تقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^s}\right)$ حيث $s>0$

نلاحظ أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ متقاربة من أجل $s>1$ لأنها متسلسلة ريمانية و متباعد عندما $0<s\leq 1$

بالتالي الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^s}\right)$ متقارب من أجل $s>1$

مثال : ادرس تقار ب الجداء $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^s}\right)$

متقاربة من أجل $s>1$

حيث $\sum_{n=2}^{\infty}-\frac{1}{n^s}$ متقاربة من أجل $s>1$ و متباعد عندما $0<s\leq 1$

مثال (سؤال امتحاني):

ادرس تقارب الجداء وأوجد قيمته $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)\ :\ |x|<1$

x أساس

الأس 2^n

الحل :

نلاحظ أن : $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n}$ متقاربة من أجل $|x|<1$ أي أن الجداء متقارب لنشكل P_n

$$\mathrm{P}_n=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots\ldots\ldots\left(1+x^{2^n}\right)$$

نضرب الطرفين ب $(1-x)$

$$\Rightarrow (1-x)\mathrm{P}_n=(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots\ldots\ldots\left(1+x^{2^n}\right)$$

نلاحظ أن أول حدين مطابقة :

$$\Rightarrow (1-x)\mathrm{P}_n = (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\ldots\ldots\ldots\left(1+x^{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow (1-x)\mathrm{P}_n = (1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)\ldots\ldots\ldots\left(1+x^{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow (1-x)\mathrm{P}_n = \left(1-x^{2^{n+1}}\right)$$

حيث أن : $\left[x^{2^n}\right]^2 = x^{2.2^n} = x^{2^{n+1}}$

إذاً $\mathrm{P}_n = \frac{\left(1-x^{2^{n+1}}\right)}{(1-x)}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

⇐ الجداء متقارب وقيمته $\mathrm{P} = \frac{1}{1-x}$

انتبه : في المحاضرة الثانية الصفحة الثانية

$$\prod_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} (-\mathbf{1})^k = (-1)^1(-1)^2(-1)^3\ldots\ldots\ldots(-1)^k = (-1)(-1)(-1)\ldots\ldots\ldots$$

والتصويب هو

$$\prod_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} (-\mathbf{1})^k = (-1)^1(-1)^2(-1)^3\ldots\ldots\ldots(-1)^k = (-1)(1)(-1)\ldots\ldots\ldots$$

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد أنس القزاز - عبد الكريم دباجة - لانا شهاب