نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄المحاضرة: السادسة        عنوان المحاضرة: التقارب المنتظم ومبرهنات

**بدأنا في المحاضرة السابقة بموضوع جديد (متتالية التوابع الحقيقة) وقلنا إن المتتالية تتقارب تقارباً نقطياً من دالة ما وعرفنا ذلك وقلنا إنها تتقارب تقارباً منتظماً وأغنينا هذ الموضوع ببعض الأمثلة وقد قام الدكتور في هذه المحاضرة بمراجعة تعريف التقارب المنتظم وإعطاء مثال على ذلك ومن ثم تناولنا بعض المبرهنات والنتائج .**

◄**تعريف:** لتكن $\{f_n(x)\}_{n\in N}$ متتالية التوابع الحقيقية المعرفة على مجال $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$ ونقول أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام من الدالة $f(x)$ على المجال $\mathbb{S}$ إذا وفقط إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يكون:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{لأجل كل} \quad n \geq N_0$$

**ولكل** $x \in I$ **حيث :**

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

تابع ل $\varepsilon$

$$N_0 = N_0(\varepsilon)$$

**مثال :** ادرس تقارب المتتالية $\{f_n(x)\}$ حيث :

$$f_n(x) = x^n \quad \text{و} \quad x \in \mathbb{S} = [p, q] \quad \text{و} \quad 0 < p < q < 1$$

نأخذ نهاية المتتالية :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad \text{كون } (1 > x)$$

إذاً المتتالية متقاربة نقطياً من الدالة الصفرية $f(x) = 0$ لنثبت أنها متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$ :

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0 = N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يتحقق :

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$$

لنوجد قيمة n من المتراجحة :$x^n < \varepsilon$

$$\Rightarrow \ln x^n < \ln \varepsilon$$

$$\Rightarrow n \ln x < \ln \varepsilon$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} > \frac{\ln \varepsilon}{\ln q} : \quad \forall x \in \mathbb{S}$$

نأخذ $N_0$ يحقق : $n \geq N_0 > \frac{\ln \varepsilon}{\ln q}$

نختار كذلك $n \geq 1$ نأخذ $* \; N_0 \geq \max\left(1, \frac{\ln \varepsilon}{\ln q}\right)$

**ملاحظة :** حددنا العبارة * من كون $\ln q$ هو سالب حيث $0<q<1$ ولكن البسط $\ln \varepsilon$ ممكن أن يكون سالب أو موجب و بالتالي لتفادي الالتباس نأخذ دليل أي تابع سالب .

نتابع : تحقق لدينا من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد : $N_0 = N_0(\varepsilon) \geq \max\left(1, \frac{\ln \varepsilon}{\ln q}\right)$ بحيث يتحقق $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ فالمتتالية متقاربة بانتظام .

◀**ملاحظة** : إذا كان لدينا $x \in I = ]0\,,1[$ وحصلنا على $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$ لا يمكن تعويض أي قيمة ل $x$ من المجال $]0\,,1[$ وبالتالي يكون $N_0(\varepsilon, x)$ هو تابع ل $x$ و $\varepsilon$ فالتقارب هو تقارب نقطي

## خواص متتالية التوابع المتقاربة

---

**مبرهنة 1 :** لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ وبفرض أنها متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على $\mathbb{S}$ عندئذٍ :

١) إذا كانت حدود المتتالية $\{f_n(x)\}$ توابع مستمرة على المجال I فإن تابع النهاية $f(x)$ مستمر على $\mathbb{S}$

٢) إذا كانت حدود المتتالية $\{f_n(x)\}$ توابع محدودة على $\mathbb{S}$ فإن التابع $f(x)$ يكون أيضاً محدود على $\mathbb{S}$

◀**تذكرة:** (تعريف الاستمرار بلغة (δ،ε) :

نقول عن التابع $f$ إنه مستمر على المجال $\mathbb{S}$ إذا تحقق لأجل كل $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث $|x - x_0| < \delta$ ويتحقق $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ حيث $x_0 \in I$

**البرهان :** ١) $\forall x \in I$ وليكن $\varepsilon > 0$ بما أن المتتالية متقاربة بانتظام فإنه يوجد لكل $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ عدد

$N_0 \neq 0$ بحيث يتحقق $n \geq N_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ولتكن $x_0 \in I$ بما أن $\{f_n(x)\}$ توابع مستمرة أي لأجل كل $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون $|x - x_0| < \delta$ ويتحقق :

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

تحقق لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث $|x - x_0| < \delta$ ويتحقق $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x \in \mathbb{S}$ وبالتالي فالتابع $f(x)$ مستمر على $\mathbb{S}$

٢) لأجل $\varepsilon > 0$ و $x \in \mathbb{S}$ بما أن متتالية التوابع متقاربة بانتظام فانه يوجد عدد $N_0 = N_0(\varepsilon) \neq 0$

بحيث يكون: $n \geq N_0 \quad : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

وبما أن $\{f_n(x)\}$ توابع محدودة على $\mathbb{S}$ فإنه يوجد عدد موجب $k > 0$

بحيث يكون $|f_n(x)| \leq k$ من أجل جميع قيم x من $\mathbb{S}$ عندئذٍ يكون:

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)|$$

$$< \varepsilon + k = M$$

أي وجدنا عدد $M = \varepsilon + k$ : $M > 0$ بحيث يتحقق $|f(x)| < M$

وبالتالي f(x) تابع محدود على $\mathbb{S}$

## ◄ نتائج:

١) إذا كانت حدود المتتالية توابع مستمرة على $\mathbb{S}$ وتابع النهاية $f(x)$ غير مستمر على $\mathbb{S}$ فالتقارب يكون تقارباً نقطياً

٢) اذا كانت حدود المتتالية توابع محدودة وتابع النهاية غير محدود فإن التقارب يكون تقارب نقطي

٣) إذا كانت حدود المتتالية توابع مستمرة على $I$ وتابع النهاية مستمر على $\mathbb{S}$ فليس بالضرورة أن يكون التقارب منظم ويكون التقارب نقطي

٤) حسب تعريف التقارب المنتظم لمتتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ فإنه يوجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد $N_0 \neq 0$ بحيث :

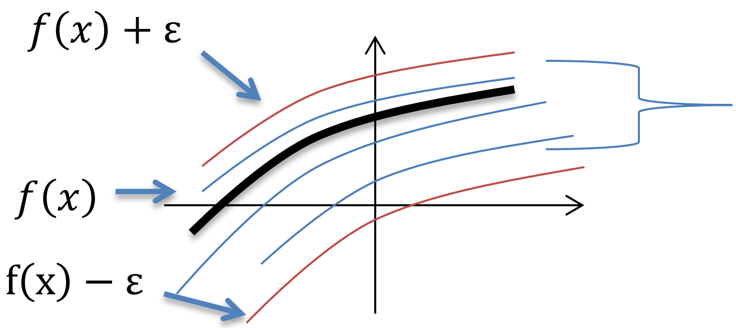
$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

إي أن جميع المنحنيات لحدود المتتالية $\{f_n(x)\}$ محصورة في الشريط الذي يقع بين المنحنين :

$f(x)-\varepsilon$ و $f(x)+\varepsilon$

كل المنحنيات

محصورة كما في الرسم




اي أنه إذا كان التقارب منتظم فإن جميع منحنيات التوابع $f_n(x)$ تقع ضمن الشريط الذي حدده

$f(x)-\varepsilon$ و $f(x)+\varepsilon$

أما إذا كان التقارب نقطي يكون بعض المنحنيات خارج هذا الشريط .

**مبرهنة3 :** لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ مستمرة ومعرفة على المجال المغلق $\mathbb{S}=[a,b]$ حيث

$-\infty<a<b<+\infty$ وبفرض أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$ من تابع النهاية $f(x)$ عندئذٍ

التابع $f(x)$ قابل للمكاملة على $\mathbb{S}$ ويحقق العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

**البرهان :**

بما أن $f_n(x)$ توابع مستمرة على I حسب المبرهنة 1 يكون التابع $f(x)$ مستمراً على I فانه قابل للمكاملة على $\mathbb{S}$ و لدينا :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

بما أن $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$

نأخذ $\varepsilon>0$ و بالتالي $\frac{\varepsilon}{b-a}>0$

يوجد عدد طبيعي $N_0\neq 0$ بحيث يكون: $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ لكل $n>N_0$

$$\left|\underbrace{\int_a^b f_n(x)dx}_{\text{الحد العام}} - \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{النهاية}}\right| = \left|\int_a^b [f_n(x)dx - f(x)]dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

◄**توضيح** : من خواص التكامل المحدد : القيمة المطلقة للتكامل أصغرأوتساوي تكامل القيمة المطلقة استخدمنا :

$$\left|\underbrace{\int_a^b f_n(x)dx}_{\text{الحد العام}} - \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{النهاية}}\right| \leq \left|\int_a^b [f_n(x)dx - f(x)]dx\right|$$

أيضا في هذه الخطوة :

$$\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \frac{\varepsilon}{b-a}[x]_a^b = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

**انتهت المحاضرة**

إعداد: محمد أنس القزاز – عبد الكريم دباجة – لانا شهاب