المحاضرة الأولى (الدكتورة) الحنيس 5/10/2017

المتجهات الطلقة والدوال متجهية القيمة وحقول المتجهات

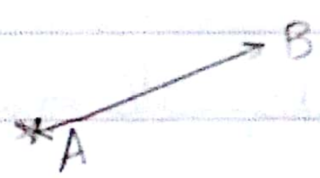
المتجه المقيد والمتجه الطلق:

متجه مقيد في نقطة A من فضاء اقليدي ثلاثي الأبعاد

(A, B)

قطعة مستقيمة موجهة $[A\,B]$ مبدؤها A ونهايتها B

رمز المتجه المقيد $\overrightarrow{AB}$



$\|AB\|$: طول القطعة المستقيمة $\overrightarrow{AB}$

$A = B$ ، A تنطبق على B $\Leftarrow$ $\overrightarrow{AA}$ المتجه الصفري في A

نقول عن المتجهين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ أنهما متكافئان أي $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$

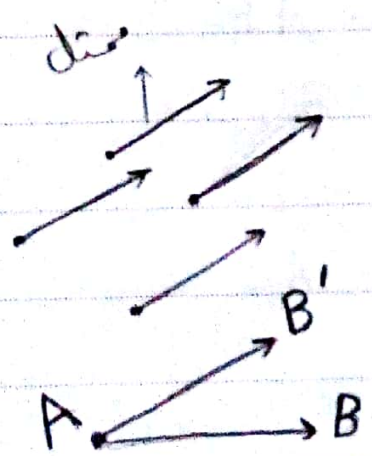
إذا تحقق:

1. $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$ (لهما الطول نفسه)
2. $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ (متوازيان أو محمولان على نفس الحامل)
3. $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما الجهة نفسها (لا يمكن قول ذلك إلا إذا كانوا متوازيان)

المتجه الطلق: صف تكافؤ من المتجهات المقيدة

واختصاراً (متجه) وله ممثل

للمتجه الطلق $\overrightarrow{AB}$ (ممثل)



لكل نقطة من الفراغ يوجد ممثل وحيد للمتجه الطلق

طول المتجه الطلق $\|\overrightarrow{AB}\|$ هو طول أحد ~~متجهاته~~ ممثلاته

ملاحظة:

يمكن التعبير عن المتجهات الطلقة بأحرف وحيدة

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ...

اصطلاحاً: المتجه الطلق الصفري هو مجموعة كل المتجهات الصفرية في الفضاء.

$\overrightarrow{AB} \longleftarrow \vec{a}$

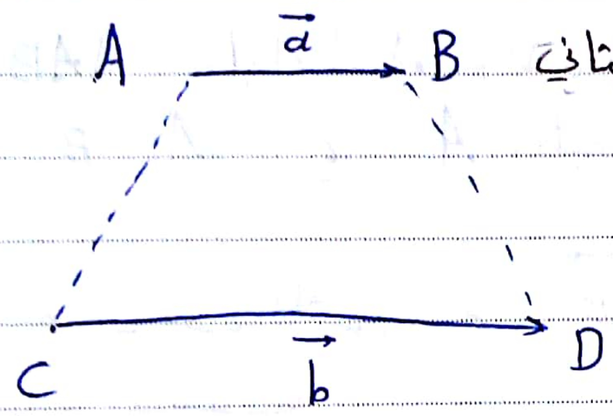
$\overrightarrow{CD} \longleftarrow \vec{b}$

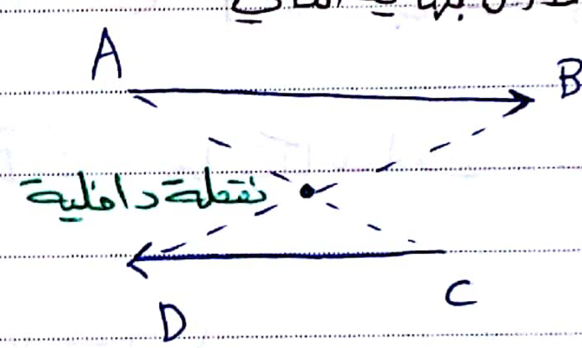
$\vec{a} \parallel \vec{b} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

$\vec{a}$ متجه طلق ممثله $\overrightarrow{AB}$
$\vec{b}$ " " " $\overrightarrow{CD}$

$\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنفس الاتجاه إذا لم تتقاطعا بنقطة داخلية

لنحصل على النقطة الداخلية نصل بداية الأول ببداية الثاني ونهاية الأول بنهاية الثاني





العمليات على المتجهات:

1- الجمع: $\vec{a}$, $\vec{b}$

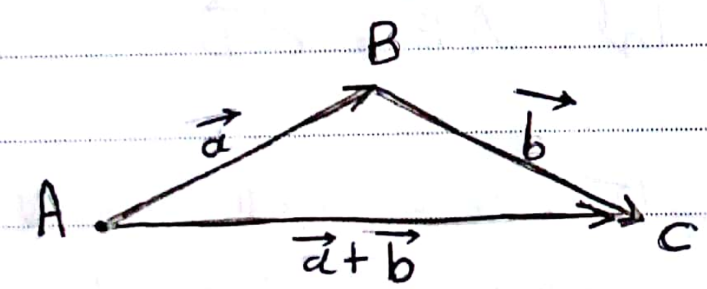
$\vec{a}$ ممثل لـ $\overrightarrow{AB}$

ومن B نأخذ ممثل لـ $\vec{b}$

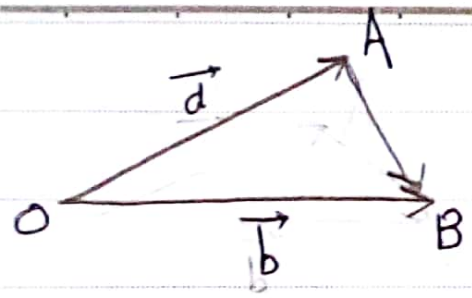
وليكن $\overrightarrow{BC}$ عندئذٍ:

$\overrightarrow{AC}$ ممثل لـ $\vec{a}+\vec{b}$ أي:

$$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AC}$$



المتجه المعاكس: $\vec{a}$ متجه والمتجه المعاكس له $\vec{a}$ يساويه بالطول ويعاكسه بالاتجاه



2- طرح متجهين :

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{AB}$$

$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$$

ملاحظة :

$\vec{AB}$ ممثل لـ $\vec{a}$ $\Longleftarrow$ $\vec{BA}$ ممثل لـ $-\vec{a}$

- المتجه الصفري رمزه $\vec{0}$ (أو)

متراجحة المثلث :

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

3- ضرب متجه طلق بعدد حقيقي :

$\vec{a}$ متجه طلق و λ عدداً حقيقياً.

$\lambda\vec{a}$: متجه طلق له الطول :

$$\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$$

و يتفق مع $\vec{a}$ بالجهة من أجل $\lambda > 0$

و يعاكس $\vec{a}$ بالاتجاه من أجل $\lambda < 0$

- مجموعة المتجهات المطلقة مزودة بعمليتي الجمع و الضرب السلمي الفضاء المتجهي

4- الجداء السلمي :

$\vec{a}, \vec{b}$ هو :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \underbrace{\angle(\vec{a}, \vec{b})}$$

الزاوية المحصورة بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$

حيث $\vec{a}$ و $\vec{b}$ غير صفريات :

خواص :

• 1- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0} \iff \left(\vec{b} = 0 \text{ أو } \vec{a} = 0 \text{ أو } \vec{a} \perp \vec{b} \right)$

2- $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = ||a||^2$

3- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

4- $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

5- $\vec{a}(\lambda\cdot\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}$

$\left(\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||\cdot||\vec{b}||\right) \Leftrightarrow$ (في حال كان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مرتبطان خطياً وبنفس الاتجاه (متوازيان))

الارتباط والاستقلال الخطي:

نقول عن المتجهات $\vec{a_n}$ ، ... ، a_1 إنها مرتبطة خطياً $\Leftrightarrow$ إذا وجدت أعداد λ_n ، ... ، λ_1 ليست جميعها أصفاراً بحيث

$$\lambda_1\vec{a_1} + \dots + \lambda_n\vec{a_n} = 0$$

وإذا كانت : $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

فإن : $\vec{a_n}$ ، ... ، $\vec{a_1}$ مستقلة خطياً

- إذا كانت أحد المتجهات صفري فالمتجهات مرتبطة خطياً.

- $\vec{b}$ و $\vec{a}$ مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا كان ممثلاهما منطبقان من نقطة واحدة وواقعان على مستقيم واحد

- $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ مرتبطة خطياً إذا كانت ممثلاتها واقعة في مستوٍ واحد.

- أي مجموعة مؤلفة ~~من~~ في الفضاء ثلاثي البعد توجد ثلاثية (ثلاث متجهات) مستقلة خطياً، وأي مجموعة مؤلفة من أكثر من ثلاث متجهات هي متجهات مرتبطة خطياً

- $\vec{e_3}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_1}$ مستقلة خطياً في فضاء المتجهات ثلاثي فإن:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 \vec{e_3}$$

$\vec{e_3}$ و $\vec{e_2}$ و $\vec{e_1}$ أساس (قاعدة) لفضاء المتجهات

(انتهت المحاضرة)

بيان البشاشي ٨٩