نظري

◄ دكتورة المادة: رشا بعاج

◄ المحاضرة: الرابعة

سنأخذ في محاضرتنا هذه كيفيّة إيجاد حل لمعادلة غير خطيّة وذلك عبر الطّرق المجالية منها طريقة تنصيف المجال، كما سنأخذ خوارزمية تنصيف المجال، وأيضاً معايير التّوقّف في الخوارزمية.

حل المعادلة غير الخطية: بفرض لدينا المعادلة $f(x) = 0$ إن إيجاد القيمة x التي تجعل المعادلة محققة يعبر عن x هو جذر للمعادلة أو x هو صفر للمعادلة أو أن الدالة تقطع المحور ox .

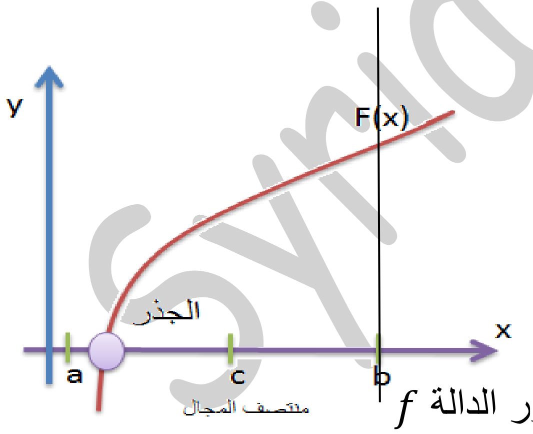
x جذر للمعادلة أو صفر للمعادلة أو الدالة تقطع المحور .
المطلوب إيجاد حل للمعادلة أو جذر للدالة .

الطّرق المجالية

علماً أن الطرق تعتمد على إيجاد جذر انطلاقا من مجال

مبرهنة القيمة المتوسطة: لتكن لدينا الدالة $f: [a, b] \to R$ المعرفة والمستمرة على المجال $[a, b]$
إذا كان $f(a). f(b) < 0$

عندها فإن الدالة $f(x)$ تغير إشارتها ضمن المجال وعليه فإن المجال $[a, b]$ يحوي جذراً واحدا للمعادلة على الاقل.



قاعدة عامة:

١) $f(a). f(b) > 0$ عندئذ إما أن يكون للدالة عدد زوجي من الجذور ضمن المجال [a, b] أو المجال لا يحوي أي جذر

٢) $f(a). f(b) < 0$ عندئذ المجال يحوي عدد فردي من جذور الدالة f

معايير التّوقّف في خوارزميّة إيجاد الجذور:

١) معيار تقارب الحل $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon(x)$

٢) معيار تقارب الدالة المطلوب إيجاد جذرها $|f(x_n)| < \varepsilon(f)$

٣) معيار تقارب الخطأ الأعظمي للطريقة $E_{max} < \varepsilon$

٤) العدد الأعظمي للتكرارات المحسوبة m

◄**ملاحظة** : من نص السؤال نستطيع أن نعرف المعيار الذي سنقوم بتطبيقه.

أولاً: طريقة تنصيف المجال: بفرض أن الدالة $f(x)$ معرفة على المجال $[a,b]$ ومستمرة عليه لإيجاد جذر الدالة في هذا المجال نقوم بعملية التنصيف.

خوارزميّة تنصيف المجال:

خوارزمية الطريقة : ١- إدخال $b_1 = b \quad , \quad a_1 = a$

تحديد طريقة التوقف(تحدد حسب التمرين): $\varepsilon_x, \varepsilon_f, \varepsilon, m$

٢ $f(b_1).f(a_1)$

٣- حساب $c = \frac{a+b}{2}$

٤- حساب $f(c)$

٥- اختبار شرط التوقف: إذا كان $|c - b_1| < \varepsilon_x$ فإن c هو الجذر التقريبي المطلوب .

إذا كان $|f(c)| < \varepsilon_f$ فإن c هو الجذر التقريبي المطلوب.

إذا كان $E_{max} < \varepsilon$ فإن c هو الجذر التقريبي المطلوب.

٦- إذا كان $f(a_1).f(c) < 0$ فإن $b_1 = c$

$f(b_1) = f(c)$ وإلا $f(a_1) = f(c) \quad a_1 = c$

٦- عودة للخطوة (٣)

مثال: أوجد جذور الدالة $f(x) = x^2 - 3$ الموجودة في المجال $[1,2]$ بطريقة تنصيف المجال بدقّة من أجل $\varepsilon(f) = 0.01$

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$c=\frac{a+b}{2}$	$f(c)$	التعديل	نصف المجال قبل التعديل $\frac{b-a}{2}$
1	1	2	-2	1	1.5	-0.75	$a=c$	0.5
2	1.5	2	-0.75	1	1.75	0.0625	$b=c$	0.25
3	1.5	1.75	-0.75	0.0625	1.625	-0.359	$a=c$	0.125
4	1.625	1.75	-0.359	0.0625	1.6875	-0.1523	$a=c$	0.625
5	1.6875	1.75	-0.1523	0.0625	1.7188	-0.0457	$a=c$	0.0313
6	1.7188	1.75	-0.0457	0.0625	1.7344	0.0081	$b=c$	0.0156
7	1.7188	1.7344	-0.0457	0.0081	1.7266	-0.0189	$a=c$	0.0078

نقارن $\varepsilon(f)$ ب $f(c)$

◄**ونلاحظ** : إذا كانت $f(a).f(c) < 0$ نبدل مكان ال b ب c $<= b_1 = c$

إذا كانت $f(a).f(c) > 0$ نبدل مكان ال a ب c $<= a_1 = c$

ومنه بما أنّ $|f(1.7344)| < 0,01$ فإن $c = 1.7344$ هو الجذر التقريبي المطلوب

لو كان شرط التوقف $\varepsilon_x = 0,01$ بهذه الحالة لازم يكون $\varepsilon_x >$ |الحد الحالي – السابق| ومنه $c = 1,7266$ وهو الجذر التقريبي المطلوب

للسبب: $|c_{n+1} - c_n| < \varepsilon_x$

لوكان السؤال أوجد خمسة تكرارات للجذر التقريبي فنقول عن $c = 1.7188$ هي الجذر المطلوب

◄**ملاحظة** : بعد الانتهاء من إيجاد الحل فنذكر وبعبارة واضحة ماهي القيمة التي تمثل قيمة الجذر التقريبي المطلوب

<u>⮘طريقة ثانية لحل التمرين: ((تتطابق الطريقة السابقة لكن دون استخدام الجدول))</u>

$$\begin{cases} f(a) = -2 \\ f(b) = 1 \end{cases}$$

$$f(a).f(b) < 0$$

إذاً يوجد جذر ضمن المجال $c=\frac{a+b}{2}=1.5$

$$f(c)=0.75>\varepsilon=0.01$$

$$f(a).f(b)<0$$

إذاً المجال الجديد [1.5,2] ونكرر العملية.

- **الخطأ الأعظمي بطريقة تنصيف المجال:**

$$E_{max}\le\frac{b-a}{2^n}$$

عدد التكرارات الأعظمي :نستطيع إيجاده إذا عطونا قيمة ε $\frac{b-a}{2^n}<\varepsilon$

- **القانون الذي نستطيع من خلاله معرفة عدد التّكرارات الأعظمي اللازم للحصول على دقة ε هو**

$$n\ge\frac{\log(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\log 2}\quad \text{أو}\quad n\ge\frac{\ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\ln 2}$$

لإيجاد n : $\frac{b-a}{\varepsilon}<2^n$ أو $n>\frac{\log(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\log 2}$ عدد التكرارات

ميزات هذه الطريقة : التقارب مضمون – حد الخطأ المعطى (الخطأ الأعظمي) يتناقص بمقدار النصف في كل تكرار – التقارب بطيء بسبب الاعتماد على طرفي المجال فقط.

اعطت الدكتورة تمرينين وظيفة سوف ندرج الحل في المحاضرة القادمة إن شاء الله ^ ^

انتهت المحاضرة

إعداد: راما جوهر & هديل سعيد & علا الدالاتي