تحليل التابعي ١

نظري

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄ المحاضرة الخامسة

عنوان المحاضرة : الفضاء الفصول

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ المجموعة الكثيفة .

٢ـ الفضاء الفصول .

$\mathbb{R}$ وفضاءاتها الجزئية غير عدودة حيث طاقة $[0,1]$ هي نفس طاقة $\mathbb{R}$ .. (كل مجموعة جزئية على شكل مجال هي مجموعة غير عدودة)

سنورد في نهاية المحاضرة كيفية اثبات ان Q عدودة..

تعريف المجموعة الكثيفة

نقول عن مجموعة جزئية M في فضاء متري X إنها كثيفة في X إذا كان $\overline{M} = X$ ((أي ان لصاقة M هي المجموعة X بمعنى أخر كل نقطة من X هي نقطة ملاصقة لـ M أي أنه أي جوار للنقطة من X يحوي على نقاط من M))

مثال على المجموعة الكثيفة

إن الأعداد العادية Q كثيفة في $\mathbb{R}$ أي أنه $\overline{Q} = \mathbb{R}$ وذلك لأنه لدينا $\overline{Q} \subseteq \mathbb{R}$ وضوحاً والأن نريد إثبات الأحتواء المعاكس ، ليكن لدينا $x_0 \in \mathbb{R}$ عدد حقيقي فإن اما ان يكون x_0 عدد عادي اي $x_0 \in Q$

أو أي جوار لـ x_0 سوف يحتوي على عدد غير منته من الأعداد العادية

أي أن $x_0 \in Q'$ (تنتمي للمجموعة المشتقة) ومنه فإن $x_0 \in Q \cup Q'$ اي أن $\mathbb{R} \subseteq \overline{Q}$ من الاحتوائين السابقين يكون لدينا $\overline{Q} = \mathbb{R}$

أي أن Q كثيفة في $\mathbb{R}$

الفضاء الفصول

نقول عن الفضاء X إنه فصول اذا حوى على مجموعة عدودة وكثيفة .

-$\mathbb{R}$ هو فضاء فصول لأنه يحتوي على Q مجموعة كثيفة وعدودة فيه

-$\mathbb{R}^2$ هو فضاء فصول لأنه يحتوي على Q^2 مجموعة كثيفة وعدودة فيه

وذلك لأنه لو المستوي $\mathbb{R}^2$ وأخذنا نقطة فيه وأخذنا كرة مفتوحة مركزها تلك النقطة .

فأن هذه الكرة سوف تحوي على عدد غير منتهي النقاط الملاصقة لـ Q

(قرص حول النقطة x_0 من الأعداد العادية الغير منتهية)

$(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4 \dots \dots, \mathbb{R}^n)$ فضاءات فصولة

أمثلة هامة عن الفضاءات الفصولة والغير فصولة

١) الفضاء ℓ^∞ غير فصول

فكرة البرهان (حتى نثبت أن ℓ^∞ غير فصول يجب علينا إثبات أن كل مجموعة كثفية في هذا الفضاء غير عدودة وبالتالي يكون الفضاء غير فصول).

الإثبات

سنأخذ في الفضاء ℓ^∞ مجموعة جزئية M $(M \subseteq \ell^\infty)$ وهذه المجموعة عناصرها عبارة عن متتاليات من الطبيعة التالية :

$$y \in M \Rightarrow y = (\eta_1, \eta_2, \dots \dots, \eta_n, . .)$$

وإن قيمة الحدود n_i إما صفر أو واحد عندئذ يكون $y \in \ell^\infty$ ،ولنقرن كل متتالية (y) بعنصر حقيقي نرمز له $(\hat{y})$

<u>تمثيله الثنائي</u> $\hat{y} = \frac{n_1}{2^1} + \frac{n_2}{2^2} + \frac{n_3}{2^3} + \cdots$

ان كل عنصرين مختلفين من M لهما تمثيلين مختلفين وان لكل عدد $\hat{y}$ ذو تمثيل ثنائي يقابل نقطة من نقط المجال $[0,1]$

والأن ربطنا مكونات الـ M بمجموعة $[0,1]$ وهي غير عدودة

فإننا نستنتج وجود مجموعة غير عدودة من المتتاليات التي عناصر كل منها صفر أو واحد ، وبما أن المترك على ℓ^∞ يبين أن المسافة بين أي متتاليتين مختلفتين من المجموعه M يجب أن تكون مساوية للواحد. أي $y_1, y_2 \in \ell^\infty$ فإن $d(y_1, y_2) = sup|\eta_i - \xi_i|$

حيث: $y_2 = (\xi_i)$ ، $y_1 = (\eta_i)$

((إذا كان العنصرين مختلفتين فإن المسافة بينهما ١ واذا كانا منطبقين فان المسافة هي ٠))

لنأخذ ثلث هذه المسافة ولنأخذ كرة مفتوحة مركزها y_1 ، وكرة مفتوحة أخرى مركزها y_2 غير منطبقتين والتي أنصاف أقطارها $(\frac{1}{3})$

وبما أنه يوجد لدينا عدد غير عدود من الكرات المفتوحة التي مراكزها نقاط من M وأنصاف أقطارها $(\frac{1}{3})$ وهذه الكرات غير متقاطعة ، اذا كان لدينا مجموعة كثيفة ما في ℓ^∞ فان كلا من هذه الكرات الغير متقاطعة ستحوي على عنصر على الاقل من الكثيفة (حسب تعريف الكثافة) ومنه لا يمكن لكثفية أن تكون عدودة وبالتالي الفضاء ℓ^∞ غير فصول .

٢) الفضاء ℓ^P هو فضاء فصول

((فكرة البرهان)) حتى نثبت أن فضاء ℓ^P فصول أي يحوي مجموعة جزئية كثيفة وعدودة .

((الإثبات)) لتكن لدينا $M \subseteq \ell^P$ ((مجموعة جزئية من ℓ^P))التي عناصرها هي متتاليات تتصف بما يلي :

$$y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots \dots, \eta_n, 0,0, \dots) \in M$$

وحيث إن n عدد صحيح موجب والأعداد : η_i عادية ، من الواضح أن M عدودة بقي علينا أن كثيفة في ℓ^P .

ليكن لدينا $x = (\xi_i) \in \ell^P$ ، نريد إيجاد عنصر من M بحيث يبعد عن x بعداً أصغر من ε (ε عدد صغير كيفي موجب).

وهو مفهوم الكثافة بأسلوب علمي لبرهان أن $\overline{M} = \ell^P$ نبرهن أن :

$$\forall \mathcal{E} > 0 \ ; \ \forall x \in \ell^P \ ; \ \exists y \in M \ \ ; d(x, y) < \varepsilon$$

طالما أن $x \in \ell^P$ فإن المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty$ أي أن المتسلسلة متقاربة ومنه فان أي باقي يسعى إلى الصفر أي :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} \quad \Leftrightarrow R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p \to 0$$

ولما كانت مجموعة الأعداد العادية كثيفة في $\mathbb{R}$ فإنه يوجد لكل ξ_i عدد عادي η_i قريب منه لذا فإنه يمكننا ضمان وجود عنصر $y = (\eta_i)$ من M يحقق الشرط :

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} \quad ; \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \quad [d(x,y)]^p = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} < \varepsilon^p$$

ومنه $d(x,y) < \varepsilon$ وبالتالي فإن M كثيفة في ℓ^P

M كثيفة وعدودة $\Leftarrow$ ℓ^P فضاء فصول

إثراء للمحاضرة:

قد مر معنا في مقررات سابقة أن Q عدودة وسنورد إثباتها .

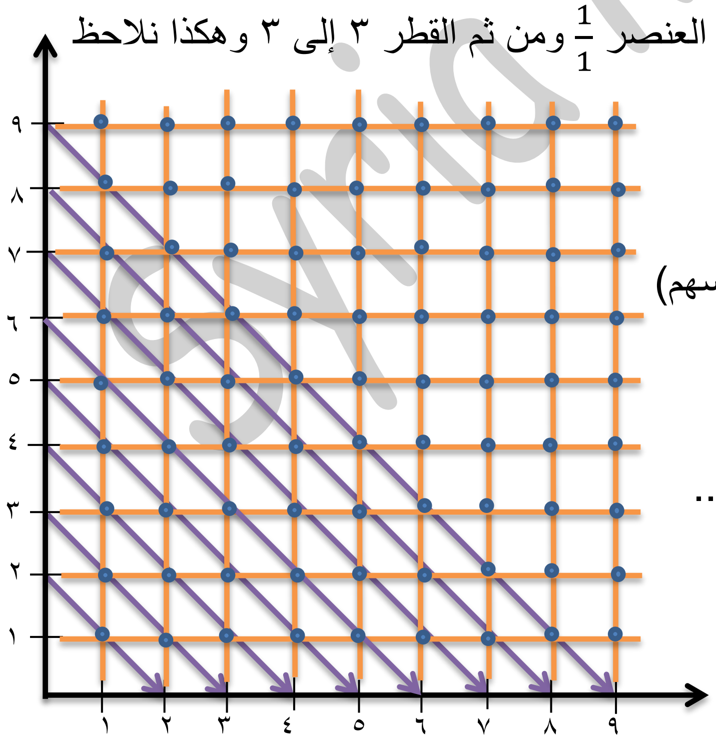
الإثبات :

إن المجموعة Q هي $Q = \{\frac{n}{m}; \quad n,m \in Z\}$

إذا استطعنا ترتيب جميع عناصر Q على شكل متتالية بحيث يكون كل عناصر المجموعة موجودة في هذه المتتالية عندئذ تكون المجموعة قابلة للعد .

لنجد طريقة لترتيب الكسور الموجبة ،نأخذ محور من الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث تكون كل نقطة من النقاط (هي عبارة عن عنصر من المتتالية).

ويكون ترتيب القطر نأخذ القطر من ٢ إلى ٢ وتكون فيه العنصر $\frac{1}{1}$ ومن ثم القطر ٣ إلى ٣ وهكذا نلاحظ أن كل نقطة سوف تدخل في المتتالية .



في السهم 2 ← 2 العنصر: $\frac{1}{3}$

في السهم 3 ← 3 العنصر: $\frac{1}{2},\frac{2}{1}$ (الترتيب حسب اتجاه السهم)

في السهم 4 ← 4 العنصر: $\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1}$

في السهم 5 ← 5 العنصر: $\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1}$ وهكذا ....

وهكذا نحصل على متتالية الكسور الموجبة .

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{3}{\text{١}},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\dots\dots..$$

أما بالنسبة الكسور السالبة فقط نضع الصفر في البداية وبعد كل كسر موجب نظيره السالب كالتالي .

$$0,\frac{1}{1},-\frac{1}{1},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{2}{1},-\frac{2}{1},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\dots\dots$$

وهذا استطعنا ترتيب جميع عناصر Q في متتالية عدودة غير منتهية ومنه فإن Q عدودة

وعدتها $|Q| = \aleph_0$ (ألف صفر)

إنتهت المحاضرة

أفضل خمسة لاعبين هم الذين
يفوزون بالمباراة وليس أفضل
خمسة من اللاعبين

إعداد: سماح علوان ** عبد الرحمن البحش ** غفران الريابي