◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄المحاضرة :الرابعة   عنوان المحاضرة :الحركة الدورانية للجسم الصلب

الحركة الدورانية للجسم الصلب حول محور ثابت

تعريفها هي حركة جسم صلب ثُبتت فيه نقطتين أثناء الحركة , وندعو المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين بمحور الدوران .

وجدنا سابقا بأن موضع وحركة جسم صلب مثبت بنقطتين يتعين تماماً إذا عرفنا موضع وحركة نقطة واحدة من الجسم غير واقعة على استقامة واحدة مع النقطتين الثابتتين .

وبالتالي يوجد درجة حرية واحدة للجسم الصلب أي أنه يوجد إحداثي معمم واحد وأبسط اختيار لهذا الاحداثي هو الزاوية (θ) المحصورة بين مستويين , المستوي الثابت ويحوي محور الدوران ومستوي متماسك مع الجسم ويحوي محور الدوران .

مثال على الحركة الدورانية ((الباب))

يتعين عن طريق مستو ثابت و هو الحائط يحوي محور الدوران , ومستوي متحرك متماسك مع الجسم يحوي محمور الدوران حيث معادلة الحركة هي :

$$\theta = \theta(t)$$

وعن طريق الزاوية (θ) نستطيع تعيين موضع أي نقطة من الجسم .

ملاحظات

1) عندما يدور الجسم الصلب حول محور الدوران فإن كل نقطة من نقاطه ترسم دائرة تقع في مستوي يعامد محور الدوران ومركزها يقع على محور الدوران ، ويكون نصف قطرها مساوي لبعد هذه النقطة عن محور الدوران

2) مسارات النقط في هذه الحالة هي عبارة عن دوائر متوازية ومتعامدة مع محور الدوران .

3) إذا دارت أي نقطة بزاوية (θ) فإن جميع نقاط الجسم تدور بنفس الزاوية .

السرعة الزاوية ويرمز لها (ω)

وهي مشتق الزاوية (θ) بالنسبة للزمن ، ونرمز لها بـ $\boxed{\omega = \theta' = \frac{d\theta}{dt}}$

شعاع الدوران

إن شعاع الدوران الزاوي محمول على محور الدوران **ويساوي** : $\boxed{\vec{\omega} = \omega\vec{k}}$

حيث: $(\vec{k})$ هو شعاع واحدة المحور الدوراني وإن جهة شعاع الدوران حول المحور يكون دوران مباشر حسب قاعدة اليد اليمنى ((إذا كانت طويلة شعاع الدوران ثابتة تسمى الحركة **"دورانية منتظمة"**))

التسارع الزاوي ونرمز له ب (ε)

وهو مشتق السرعة الزاوية (ω) بالنسبة للزمن : $\boxed{\varepsilon = \omega' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d2\theta}{dt^2}}$

شعاع التسارع الزاوي

هو مشتق شعاع الدوران بالنسبة للزمن : $\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$ وهو شعاع محمول على محور الدوران, **أي**:

$\vec{\varepsilon} = \varepsilon.\vec{k} = \omega'\vec{k}$ لكن جهة (ε) ليس بالضرورة أن تكون من جهة (ω) أي إذا كان:

$\vec{\varepsilon}, \vec{\omega}$ بنفس الجهة $\Leftarrow$ الحركة متسارعة

$\vec{\varepsilon}, \vec{\omega}$ بجهتين متعاكستين $\Leftarrow$ الحركة متباطئة

$\vec{\varepsilon} = 0$ الحركة منتظمة $\Leftrightarrow$ $|\vec{\omega}| = const$

$|\vec{\varepsilon}| = const$ $\Leftrightarrow$ الحركة متغيرة بانتظام

الدراسة الشعاعية للحركة الدورانية حول محور ثابت

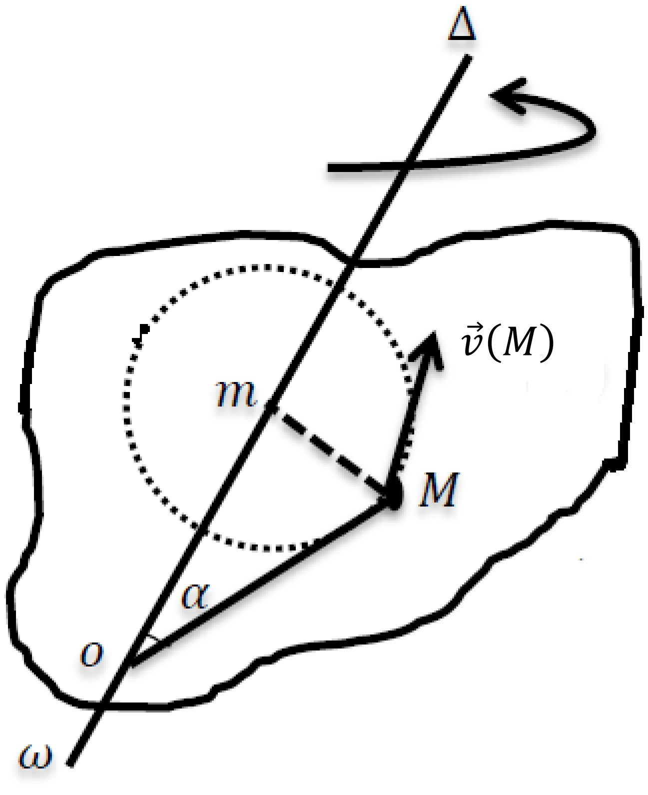
توزع السرع

لتكن (M) نقطة ما من الجسم الصلب (s) فإن مسارها عبارة عن دائرة مركزها يقع على محور الدوران ومستويها يعامد محور الدوران ونصف قطرها يتغير حسب قرب أو بعد النقطة من محور الدوران فإن سرعة النقطة (M) محمول على مماس الدائرة وقيمته العددية $\boxed{v(M) = \omega \times r}$

وهو يعامد محور الدوران $((\vec{v}(M) \perp \vec{\omega}))$

لنأخذ (m) المسقط القائم لـ (M) على محور الدوران (Δ), أي :

$((\overrightarrow{mM} \perp \vec{\omega}))$ و $\overrightarrow{mM}$ نصف القطر



ولتكن (o) نقطة من محور الدوران (Δ)

ويمكننا كتابة العلاقة :

$$\overrightarrow{oM} = \overrightarrow{om} + \overrightarrow{mM}$$

ولدينا $\vec{v}(\mathrm{M}) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{om} + \overrightarrow{mM} \right)$$

$$\vec{v}(M) = \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{om} \right) + \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{mM} \right)$$

$$\vec{v}(M) = \vec{o} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{mM}$$

إن $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{om} = 0$ لأن $\vec{\omega} \ \backslash\backslash \ \overrightarrow{om}$

و بما أن كل من $o, M \in \Delta$

$$\Rightarrow \vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{mM}$$

وبالتالي أصبح لدينا عبارتين للسرعة :

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM} \quad ; \quad o \in \Delta$$

$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{mM}$ $\quad$ m المسقط القائم لـ M

والقيمة العددية للسرعة هي :

$|\vec{v}(m)| = \omega . r$ $\quad ; \quad$ r نصف القطر

توزع التسارعات

لتكن (M) نقطة ما من الجسم , وإن تسارع (M) هو مشتق لشعاع السرعة بالنسبة للزمن :

$$\forall\, M \in S \,;\, \vec{\Gamma}(M) = \frac{dv(M)}{dt}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \frac{d\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM} \right)}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{oM}}{dt} \quad ; \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{mM})$$

<u>وحسب علاقة جيبس التي تنص على</u> :

$$\boxed{\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = (\vec{a}.\vec{c}).\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \left(\vec{\omega}.\overrightarrow{mM}\right).\vec{\omega} - \overrightarrow{\omega^2}.\overrightarrow{mM}$$

وبما أن $\overrightarrow{mM} \perp \vec{\omega}$ فإن $\vec{\omega}.\overrightarrow{mM} = 0$ ، بحيث $\overrightarrow{mM}$ نصف القطر ومنه :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2.\overrightarrow{mM}}$$

حيث $(\vec{\varepsilon})$ شعاع التسارع الزاوي

$\overrightarrow{mM}$ المسقط القائم لـ (M) على محور الدوران

$\overrightarrow{oM}$ شعاع موضع النقطة (o) من محور الدوران

تنويه : لحل التمارين نستخدم العلاقة :

$$\vec{\Gamma}(M) = \overrightarrow{\Gamma_T}(M) + \overrightarrow{\Gamma_N}(M) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2.\overrightarrow{mM}}$$

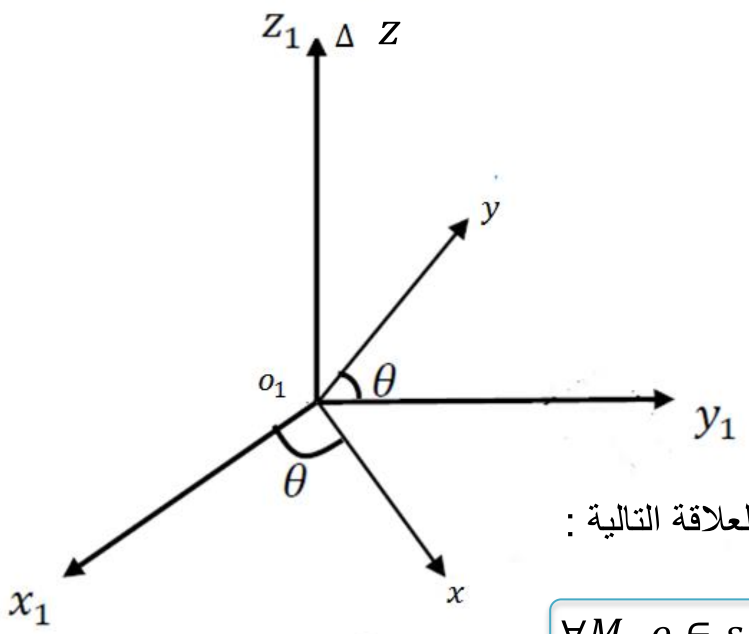
حيث التسارع المماسي هو : $\overrightarrow{\Gamma_T}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM}$

والتسارع الناظمي هو : $\overrightarrow{\Gamma_N}(M) = -\omega^2.\overrightarrow{mM}$

ملاحظة : إذا كانت السرعة الزاوية ثابتة (($|\vec{\omega}| = c$)) فإن الحركة الدورانية منتظمة وبالتالي التسارع (($|\vec{\varepsilon}| = 0$)) معدوم ويصبح التسارع لأي نقطة ناظمياً .

الدراسة التحليلية للحركة الدورانية حول محور ثابت

تعيين الموضع



لنأخذ (o_1, x_1, y_1, z_1) جمل محاور ثابتة

بحيث o_1z_1 ينطبق على محور الدوران (Δ)

ونختار جملة محاور متماسكة (متحركة)

مع الجسم (o, x, y, z) أيضا و oz ينطبق

على محور الدوران (Δ)

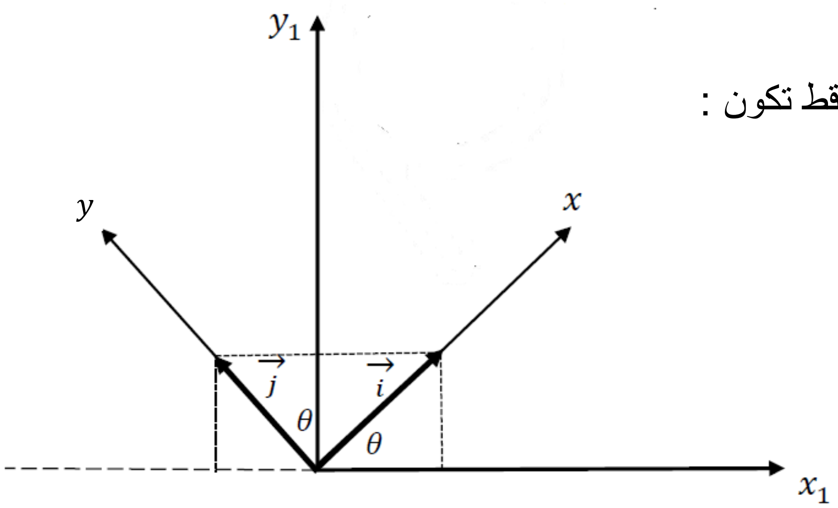
إن موضع أي نقطة (M) من (s) يتعين بإسقاط العلاقة التالية :

$$\forall M, o \in s : \overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{oM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \dots(*)$$

على جملة المحاور الثابتة

حيث (x, y, z) إحداثيات النقطة (M) بالنسبة للجملة المتماسكة فهي مقادير ثابتة

إن مسقط كل من $\vec{i}, \vec{j}$ عبارة عن تركيب شعاعين على o_1x_1 و o_1y_1



وبالتالي فهو عبارة عن علاقة جمع

أما $\vec{k}$ فهو ثابت ويساوي $\vec{k_1}$ وبالتالي فإن المساقط تكون :

$$\vec{i} = cos\theta\vec{i_1} + sin\theta\vec{j_1}$$

$$\vec{j} = -sin\theta\vec{i_1} + cos\theta\vec{j_1}$$

$$\vec{k} = \vec{k_1}$$

بتعويض العلاقات الأخيرة بالعلاقة $(*)$:

$$\overrightarrow{oM} = x(cos\theta\vec{i_1} + sin\theta\vec{j_1}) + y(-sin\theta\vec{i_1} + cos\theta\vec{j_1}) + z\vec{k_1}$$

$$= (xcos\theta - ysin\theta)\vec{i_1} + (xsin\theta + ycos\theta)\vec{j_1} + z\vec{k_1}$$

وبالإسقاط نجد :

$$x_1 = xcos\theta - ysin\theta$$

$$y_1 = xsin\theta + ycos\theta$$

$$z_1 = z$$

وهي مركبات النقطة (M) في الجملة الثابتة .

عندما نقوم بتعويض $\theta = \theta(t)$ بالمساقط نحصل على معادلات حركة النقطة (M) وهي بالشكل :

$$\boxed{x_1 = x_1(t) \quad , \quad y_1 = y_1(t) \quad , \quad z_1 = z_1(t)}$$

وبحذف الوسيط (t) من هذه المعادلات نحصل على معادلتين تشكلان مسار النقطة (M) .

تعيين السرع

لحساب مركبات متجه سرعة (M) تحليليا نشتق الموضع $\overrightarrow{oM}$ بالنسبة للجملة الثابتة

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM} = \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \vec{v}(M) = -y_1\omega\vec{i_1} + x_1\omega\vec{j_1}$$

حيث $\vec{\omega}$ هي $(0,0,\omega)$ لأنها محمولة ع محور الدوران و $\vec{\omega}$ عامودي على مستوي الحركة .

ويمكن الحصول على مركبات متجه السرعة مباشرة على الجملة المتماسكة بالإسقاط :

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\vec{\imath} + x\omega\vec{\jmath}$$

يمكننا إيجاد علاقات السرعة المباشرة باشتقاق الجملة الثابتة فقط فتصبح :

$$x_1' = -xsin\theta.\theta' - ycos\theta.\theta'$$
$$y_1' = xcos\theta.\theta' - ysin\theta.\theta'$$
$$z_1' = 0$$

أما بالنسبة للجملة المتماسكة فلا يمكننا الاشتقاق مباشرة فقط نطبق القانون : $\vec{v}(\mathrm{M}) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$.

تعيين التسارعات

نشتق مباشرة مركبات متجه السرعة للنقطة (M) **<u>في الجملة الثابتة</u>** فنجد :

$$\vec{\Gamma}(\mathrm{M}) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \frac{d2\overrightarrow{oM}}{dt^2}$$
$$= x_1''\vec{\imath} + y_1''\vec{\jmath} + z_1''\vec{k}$$

باشتقاق $v(M)$ مباشرة

$$x_1'' = -xcos\theta.\theta'' + ysin\theta.\theta''$$
$$y_1'' = -xsin\theta.\theta'' - ycos\theta.\theta''$$
$$z_1'' = 0$$

أو عن طريق اسقاط العلاقة التالية على المحاور الثابتة :

$$\vec{\Gamma}(\mathrm{M}) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\vec{\Gamma}(\mathrm{M}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath_1} & \overrightarrow{\jmath_1} & \overrightarrow{k_1} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath_1} & \overrightarrow{\jmath_1} & \overrightarrow{k_1} \\ 0 & 0 & \omega \\ -y_1\omega & x_1\omega & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(\mathrm{M}) = (-y_1\varepsilon - x_1\omega^2)\overrightarrow{\imath_1} + (x_1\varepsilon - y_1\omega^2)\overrightarrow{\jmath_1}$$

أو على **<u>المحاور المتماسكة</u>** .....

$$\boxed{\vec{\Gamma}(\mathrm{M}) = (-y\varepsilon - x\omega^2)\vec{\imath} + (x\varepsilon - y\omega^2)\vec{\jmath}}$$

انتهت المحاضرة

الحياة إما مغامرة جريئة أو لا شيء

إعداد: محمد علي فليون && هى حبشية