نظري

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄المحاضرة : الاولى عنوان المحاضرة: المودول

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتعريف الفضاء الشعاعي و الحلقة .

٢ـتعريف المودول.

٣ ـ أمثلة على المودول .

تعريف الحلقة : لتكن $\mathcal{R}$ مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل داخليين الأول $(+)$ والثاني $(.)$ نقول عن البنية الجبرية $(\mathcal{R},+,.)$ أنها حلقة إذا وفقط أذا تحققت الشروط التالية :

- $(\mathcal{R},+)$ زمرة تبديلية .
- $(\mathcal{R},.)$ شبه زمرة (نصف زمرة)
  - $\forall a,b \in \mathcal{R} \;\; ; \;\; a.b \in \mathcal{R}$ أي مغلقة بالنسبة للضرب .
  - $\forall a,b,c \in \mathcal{R} \; ; \; (a.b).c = a.(b.c)$ شرط التجميعية محقق.
- الضرب توزيعي على الجمع $(.)$ توزيعي على $(+)$ (من اليمين ومن اليسار).

$$\forall a,b,c \in \mathcal{R} \; ; \begin{cases} a.(b+c) = a.b + a.c \\ (b+c)a = b.a + c.a \end{cases}$$

الفضاء الشعاعي : لتكن $V \neq \emptyset$ **مجموعة ما و** ليكن F حقل عندها لنعرف على V قانوني تشكيل :

$$\begin{gathered} +: \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V} \\ (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) \to \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \\ .: \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V} \\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{v_2}) \to \boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{v_2} \end{gathered}$$

عندها V فضاء شعاعي على F اذا تحققت الشروط التالية :

١- $(V,+)$ زمرة تبديلية الحيادي يرمز له بـ 0_V ((صفر الفضاء))

٢- أياً كان $\beta,\varphi \in F$ و $v,v_1,v_2 \in V$ فإن :

١) $1_F \,.\, v = v$

٢) $(\varphi+\beta).v = \varphi v + \beta v$

٣) $\varphi(v_1+v_2) = \varphi v_1 + \varphi v_2$

٤) $\varphi.(\beta.v) = (\varphi.\beta).v$

مثال : R^n فضاء شعاعي على R .

الفصل الأول " المودولات "

تعريف : لتكن M مجموعة غير خالية ولتكن A حلقة ولنزود M بقانوني تشكيل الأول داخلي $(+)$ والثاني خارجي $(.)$ مجموعة مؤثراته الحلقة A .

$$+ \,: M \times M \longrightarrow M$$

$$(m_1,m_2) \longrightarrow m_1+m_2$$

$$. \,: A \times M \longrightarrow M$$

$$(a,m) \longrightarrow a.m$$

نقول عن M أنها مودول على الحلقة A أو(M هو A – مودول) إذا تحقق ما يلي :

- $(M,+)$ زمرة تبديلية الحيادي فيها 0_M
- أياً كان $m,m_1,m_2 \in M$ و $\beta,\varphi \in A$ فإن :

١) $1_A \,.\, m = m$

٢) $(\varphi+\beta).m = \varphi m + \beta m$

٣) $\varphi(m_1+m_2) = \varphi m_1 + \varphi m_2$

٤) $\varphi.(\beta m) = (\varphi\beta).m$

ملاحظة : سنعتمد في دراستنا المقبلة على الحلقات الغير الصفرية والواحدية.

ملاحظة : إن المودولات هي حالة خاصة من الفضاءات الشعاعية حيث الفرق بينهما أن الفضاءات الشعاعية تملك حقل اما المودول فهو يمتلك حلقة بدلاً من حقل .

مثال : اذا كان لدينا V فضاء شعاعي على حقل F فإن V مودول على F (لان كل حقل هو حلقة)

ولكن العكس غير صحصح بالضرورة.

أمثلة : ١) اذا كان لدينا A حلقة فإن A مودول على نفسها .

الحل :

نزود على A قانوني تشكيل الأول داخلي والثاني خارجي ومن ثم نتحقق من شروط تعريف المودول :

بالنسبة للقانون الأول الداخلي $(+)$ سيكون نفسة القانون الداخلي الأول للحلقة A ومنه :

نعلم ان الحلقة A لها قانوني تشكيل داخليين الأول جمع ومعرف عليه زمرة تبديلية $(A,+)$ زمرة تبديلية أي الشرط الأول محقق .

وبالنسبة للقانون الثاني الخارجي $(.)$ سنعرفه بالشكل التالي

$$.: A \times A \longrightarrow A$$

والشروط الباقية من تعريف المودول محققة لان A حلقة واحدية ومنه :

- 1_A حيادي الضرب .
- الضرب توزيعي على الجمع من اليمين
- الضرب توزيعي على الجمع من اليسار
- الضرب تحقق الخاصية التجميعية

<u>وبالتالي A مودول على نفسها</u>

٢) لتكن A حلقة عندئذ A^n هي مودول على A .

الحل :

لنعرف على A^n قانوني تشكيل الأول داخلي والثاني خارجي كما يلي

$$+ : A^n \times A^n \longrightarrow A^n$$

$$(x,y) \rightarrow x+y$$

حيث $$x = (x_1, x_2, \dots \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots \dots, y_n) \in A^n$$

$$x_i, y_i \in A^n : i = 1,2,3, , , , , n$$

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots \dots ., x_n + y_n) \in A^n$$

وقانون التشكيل الثاني : $$. : A \times A^n \longrightarrow A^n$$

$$(a,x) \rightarrow a.x \quad : \quad a \in A$$

$$a.x = (ax_1, ax_2, \dots \dots, ax_n) \in A^n$$

١) لنثبت أن $(A^n,+)$ زمرة تبديلية

$$\forall\, x = (x_1, x_2, \dots \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots \dots, y_n), z = (z_1, z_2, \dots \dots, z_n) \in A^n$$

- الحيادي الجمعي $0 = (0_A, \dots, 0_A)$

$$(x_1, \dots\dots, x_n) + (0_A, \dots, 0_A) = (0_A, \dots, 0_A) + (x_1, \dots\dots, x_n) = (x_1, \dots\dots, x_n)$$

- تبديلية :

$$x + y = (x_1, x_2, \dots\dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots\dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots\dots, x_n + y_n)$$

$$= \left(\underbrace{y_1 + x_1, \dots\dots, y_n + x_n}_{\text{التبديلية محققة لأن العناصر من } A \text{ و } A \text{ حلقة}} \right) = (y_1, y_2, \dots\dots, y_n) + (x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = y + x$$

- النظير الجمعي :

$$(x_1, \dots\dots, x_n) + (-x_1, \dots\dots, -x_n) = (x_1 - x_1, \dots\dots, x_n - x_n) = (0_A, \dots, 0_A)$$

$$(-x_1, \dots\dots, -x_n) + (x_1, \dots\dots, x_n) = (-x_1 + x_1, \dots\dots, -x_n + x_n) = (0_A, \dots, 0_A)$$

- تجميعية

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= (x_1 + y_1, \dots\dots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \dots\dots, z_n) = \\ &= \big((x_1 + y_1) + z_1, \dots\dots, (x_n + y_n) + z_n\big) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), \dots\dots, x_n + (y_n + z_n)) = x + (y + z)\end{aligned}$$

<u>**وبالتالي فإن $(A^n, +)$ زمرة تبديلية .**</u>

٢) لنتحقق من الشروط الأربعة :

- $1_A . (x_1, \dots\dots, x_n) = (1_A . x_1, \dots\dots, 1_A . x_n) = (x_1, \dots\dots, x_n)$

لأن 1_A هو حيادي الضرب في A .

- $\forall \varphi, \beta \in A$

$$\begin{aligned}\varphi\,\big((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\big) &= \varphi . (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ &= \big(\varphi . (x_1 + y_1), \dots, \varphi . (x_n + y_n)\big) \\ &= \big((\varphi . x_1 + \varphi . y_1), \dots, (\varphi . x_n + \varphi . y_n)\big) \\ &= \varphi\,(x_1, \dots, x_n) + \varphi(y_1, \dots, y_n)\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(\varphi + \beta).(x_1, \dots, x_n) &= (\varphi . x_1, \dots, \varphi . x_n) + (\beta . x_1, \dots, \beta . x_n) \\ &= \varphi . (x_1, \dots, x_n) + \beta . (x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(\varphi . \beta).(x_1, \dots, x_n) &= \big((\varphi . \beta). x_1, \dots, (\varphi . \beta). x_n\big) = (\varphi(\beta . x_1), \dots, \varphi . (\beta . x_n)) \\ &= \varphi . (\beta . x_1, \dots, \beta . x_n) = \varphi . \big(\beta . (x_1, \dots, x_n)\big)\end{aligned}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو النوت – شهد حايك البوشي