نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الأولى   عنوان المحاضرة: مدخل إلى الأعداد العقدية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ مقدمة عن سبب ظهور الأعداد العقدية والحاجة إليها

٢ ـ تعريف مجموعة الأعداد العقدية

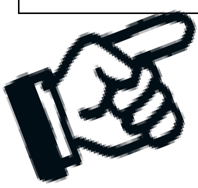
٣ـ جبر الأعداد العقدية

مقدمة عن مجموعة الأعداد العقدية

قبل البدء في التحدث عن الأعداد العقدية .. لا بد من أن تعلم زميلي أهمية المنطق الرياضي في علوم التحليل .. قد نوه الدكتور إلى ضرورة الانتباه للعبارات المنطقية و دلالاتها و قد أعطى على ذلك المقارنة التالية كمثال :

العبارة المنطقية	معناها
$\forall\varepsilon > 0\,; \exists\delta > 0 : \forall x \in A : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$	ذكرنا لعبارة ($\exists\,\delta > 0$) و من ثم ($: \forall x \in A$) فهذا يدل على أنه يوجد δ واحدة تصلح لكل x من A (يوجد δ بحيث مهما تكون x يتحقق الباقي)
$\forall\varepsilon > 0 : \forall x \in A\,; \exists\delta > 0 :: \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$	أما هنا فنحن نقول من أجل كل x يوجد δ مناسبة لهذه الـ x ((أي ستتغير δ كلما تغيرت x))

لذلك لا بد أن نتوخى الدقة أثناء القراءة و الدراسة ..و أيضاً أثناء الكتابة. ^_^



تعريف الدالة الحقيقية أو تعريف التابع الحقيقي : هي دالة مستقرها $\mathbb{R}$ أو مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ و هو التعريف الأدق للدالة الحقيقية لأننا صراحة لا نعلم ما هو المنطلق فيمكن أن يكون $\mathbb{N}$ أو $\mathbb{Z}$ أو $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ أو...

باختصار : صفة التابع هي صفة المستقر لهذا التابع
تابع حقيقي -->مستقره حقيقي
تابع صحيح -->مستقره صحيح

فقولنا عن دالة ما إنها حقيقية فإننا نقصد أن مستقرها

هو مجموعة الأعداد الحقيقية

◄وتحديداً عندما نقول دالة حقيقية بمتحول

عقدي نقصد دالة منطلقها مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ ومستقرها $\mathbb{R}$

مثال آخر للتوضيح : دالة حقيقية بمتحول صحيح أي أنها دالة منطلقها $\mathbb{Z}$ومستقرها $\mathbb{R}$

في الحقيقة إن أول مجموعة عددية عرفها الإنسان هي مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$وبعد ذلك تم اكتشاف المجموعات الأخرى نظراً لأن الأعداد الطبيعية لا تلبي كل الحاجات الرياضية ...

و لنتابع كيف تم توسيع المجموعات :

- بدأت الفكرة بملاحظة أن المعادلة $x-5=0$ لها حل في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ و هو $(x=5)$ " أو هي $x-a=0$ حيث a عدد طبيعي "

لكن عندما ننظر في المعادلة $x+5=0$ فنجد أنه ليس لها حل في $\mathbb{N}$ ((لا يوجد عدد طبيعي نضعه بدل x فتتحقق المساواة)) و بالتالي ظهرت الحاجة لتوسعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعة الأعداد الصحيحة

- فالمعادلة $x+5=0$ قابلة للحل في $\mathbb{Z}$ و حلها $x=-5$.

- لن نتوقف هنا ... لننظر في المعادلة $2x-1=0$ ، من الواضح أنه ليس لها حل في $\mathbb{N}$ ولا في $\mathbb{Z}$ لذلك لمَ لا نوسع مجموعة الأعداد الصحيحة إلى مجموعة تحوي أعداداً كسرية و لندعوها $\mathbb{Q}$ (مجموعة الأعداد العادية)
- و هكذا حتى إذا نظرنا للمعادلة $x^2=2$ فلن نجد في أي من المجموعات $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ عدداً مربعه يساوي ٢ لذلك .. سنوسع هذه المجموعة الأخيرة $\mathbb{Q}$ إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ و التي تحوي حلين (و ليس فقط حل واحد) للمعادلة $x^2=2$ $(x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2})$
- أخيراً نصل للمعادلة $x^2+1=0$ فنجد أنه لا يوجد لها حل بالمجموعات التي ذكرناها سابقاً **لإيجاد الحل ؟؟؟؟ o.O**

تم إيجاد مجموعة جديدة تدعى **الأعداد العقدية** $\mathbb{C}$ و هي التي ستكون محور دراستنا في هذا المقرر.
و كل ما درسناه في السنوات السابقة على التحليل الحقيقي (من دراسة التوابع و خواصها و الاستمرار و الاشتقاق و المتتاليات و غيرها ...) سندرسه في مجموعة الأعداد العقدية أي سنقوم

بدراسة نهاية تابع عقدي والمتتاليات والمتسلسلات على توابع عقدية وتقارب متسلسلة عقدية الخ.....

مجموعة الأعداد العقدية :

تعريف : نسمي أي ثنائية مرتبة $(\alpha\,,\beta)$ من الأعداد الحقيقية عدداً عقدياً

ونعني بكلمة مرتبة أن $(\alpha\,,\beta) \neq (\beta\,,\alpha)$

ونرمز للأعداد العقدية بالرمز $\mathbb{C}$ أي أن:

$$\mathbb{C} = \{(\alpha\,,\beta) :\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$$

أمثلة : $(-1,0),(1,0),(0,0),(0,1),(-2,3),(1,6),\left(\frac{1}{2},3\right),(\pi,-\frac{2}{3}) \in \mathbb{C}$ كلها أعداد عقدية

نقول عن عددين عقديين $(\alpha_1\,,\beta_1),(\alpha_2\,,\beta_2)$ أنهما متساويان إذا وفقط إذا

$$\alpha_1 = \alpha_2 \ \wedge\ \beta_1 = \beta_2$$

الرمز $\wedge$ يعني " و"
الرمز $\vee$ يعني "أو"

جبر الأعداد العقدية :

- **جمع الأعداد العقدية:** لنعرف عملية الجمع بالشكل :

$$(\alpha_1\,,\beta_1) + (\alpha_2\,,\beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_1\,,\beta_2 + \beta_2)$$

و هو قانون التشكيل الداخلي ((لأن مجموع عددين هو عدد عقدي))

و بسهولة يمكن ملاحظة أن هذا الجمع تبديلي و تجميعي ، أنّ هذا الجمع يملك حيادي هو $(0,0)$ حيث:

$$(\alpha\,,\beta) + (0\,,0) = (\alpha + 0\,,\beta + 0) = (\alpha\,,\beta)$$

و لكل عنصر نظير و ذلك بملاحظة أن:

$$(\alpha\,,\beta) + (-\alpha\,,-\beta) = (0,0)$$

و إشارة الـ$(-)$ تعني نظير $\quad \Longrightarrow\ -(\alpha\,,\beta) = (-\alpha\,,-\beta)$

بالتالي نستنتج أن $(\mathbb{C}\,,+)$ زمرة تبديلية

- **جداء عددين عقدين :** لنعرف عملية الضرب بالشكل

$$(\alpha_1 , \beta_1).(\alpha_2 , \beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 , \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

و هي عملية تجميعية و تبديلية و يوجد هنا $(1 ,0)$ هو حيادي بالنسبة للضرب

$$(\alpha , \beta).(1,0) = (\alpha - 0 ,0 + \beta) = (\alpha , \beta)$$

و أن لكل عدد عقدي (α , β) غير معدوم (غير $(0,0)$) نظير بالنسبة للجداء (مقلوب)

الحقل: هو حلقة تبديلية واحدية لا تحوي قواسم صفرية

$(\mathbb{C} , + ,\cdot)$ حقل تبديلي أي لايحوي قواسم صفرية

- **الضرب بعدد حقيقي أو سلمي** ليكن $3 = (\alpha , \beta) \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ نعرف الضرب بعدد حقيقي بالشكل

$$\lambda 3 = (\lambda\alpha , \lambda\beta)$$

و هو قانون تشكيل خارجي

وظيفة

١- أوجد $(\alpha , \beta)^{-1} = ??$ حسب قانون ضرب عددين عقديين ا

٢- أثبت $(\mathbb{C} , + ,*)$ فضاء متجهي بعده 2 حيث $\lambda * z = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$

٣- أثبت أن الحقل $(\mathbb{C} , + ,*)$ لن يكون حقل مرتباً كلياً

انتهت المحاضرة

إعداد: مهيار طعمة – شهناز طاطيش – يمنى خرما