التحليل العقدي 1

نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄المحاضرة : الثالثة   عنوان المحاضرة : مرافق عدد عقدي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـمراجعة لما سبق

٢ـمجموع عددين عقديين هندسياً

٣ـمرافق عدد عقدي

قام الدكتور بمراجعة بعض الأفكار من المحاضرات السابقة .....

- مجموعة الأعداد العقدية : $\mathbb{C} = \{(\alpha , \beta) \ : \alpha , \beta \in \mathbb{R}\}$
- تساوي عددين عقديين: $(\alpha_1 , \beta_1) = (\alpha_2 , \beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 = \beta_2$
- $(\mathbb{C} , + , \ \cdot)$ حقل تبديلي لا يحوي قواسم صفرية ، كما أنه لا يمكننا ترتيب **الحقل** $\mathbb{C}$ كلياً
- $(\mathbb{C} , + ,*)$ فضاء متجهي بعده 2 و المجموعة $\{(1,0), (0,1)\}$ قاعدة له
- يمكننا كتابة أي عدد عقدي كتركيب خطي للقاعدتين كالتالي :

$$(\alpha , \beta) = (\alpha, 0) + (0 , \beta) = \alpha(1,0) + \beta(0,1)$$

- تمثيل الأعداد العقدية :

١ ـ **<u>التمثيل النقطي للأعداد العقدية:</u>** إذا كان $\mathfrak{z} = \alpha + i\beta$ عدداً عقدياً فإننا نمثله بالنقطة (α , β) في مستوٍ منسوب لجملة محورين متعامدين oy, ox نسميه المستوي العقدي أو مستوي غاوص

تذكرة : $\mathfrak{z} = \alpha + i\beta$

الجزء الحقيقي $Re\mathfrak{z} = \alpha$

الجزء التخيلي $Im\mathfrak{z} = \beta$

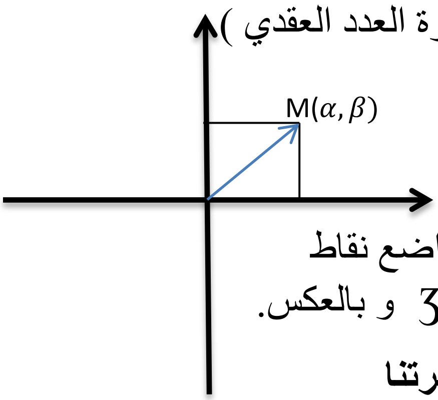
◄ **<u>انتبه</u>** : الجزء التخيلي هو أمثال لـ i و هو عدد حقيقي

<u>بسبب</u> وجود تقابل بين مجموعة الأعداد العقدية والمستوي العقدي فإنه يمكننا أن نسمي العدد العقدي نقطة وبالعكس أي أنه نسمي النقطة في المستوي بالعدد العقدي فمثلاً ليكن لدينا العدد العقدي $\mathfrak{z} = \alpha + i\beta$ فإننا نستطيع أن نمثله كنقطة (α , β) في المستوي

ملاحظة : نوه الدكتور إلى أن التعامل مع الشكل الجبري للأعداد العقدية أسهل من التعامل مع ثنائية لذلك

سنعتمد في دراستنا في الأعداد العقدية على الشكل الجبري $(z = \alpha + i\beta)$

٢- **التمثيل الشعاعي للأعداد العقدية:** كما أسلفنا قبل قليل ... إن العدد العقدي $z = \alpha + i\beta$ يمثل بنقطة وحيدة في المستوي العقدي هي $M(\alpha,\beta)$ (التي كنا سابقا ندعوها صورة العدد العقدي)



إذاً يقابل $z = \alpha + i\beta$ شعاع وحيد في المستوي العقدي هو $\overrightarrow{oM}$

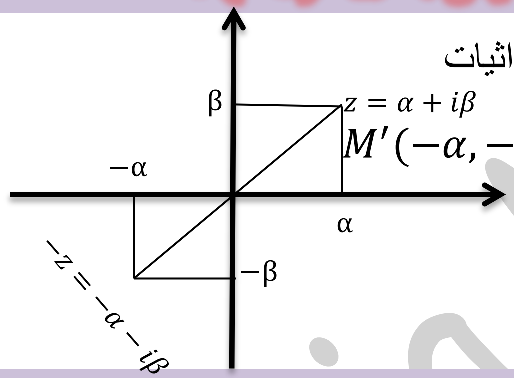
- إن مركبات الشعاع $\overrightarrow{oM}$ هي نفسها إحداثيات النقطة M
- بسبب التقابل الموجود بين مجموعة الأعداد العقدية ومجموعة أشعة مواضع نقاط المستوي العقدي يمكننا أن نسمي العدد العقدي z بالشعاع z أو بالنقطة z و بالعكس.

انتهينا من مراجعة الأفكار السابقة والأن لنبدأ بمحاضرتنا

سؤال : ماذا يعني هندسياً التابع الذي يقرن كل عدد عقدي z بنظيره $(-z)$ ؟!

هذا التابع هو أحد التحويلات الهندسية و هي التناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

حيث أن هذا التابع سيعكس إشارات مسقطي النقطة $M(\alpha,\beta)$ إلى $M'(-\alpha,-\beta)$



مجموع عددين عقديين هندسياً

ليكن $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \;\;\&\;\; z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ عددين عقديين عندئذ المجموع لـ z_1, z_2 هو :

$$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2)$$

ولتكن M, M_1, M_2 النقاط الممثلة لـ z, z_1, z_2 على الترتيب عندئذ :

$$\overrightarrow{oM_1} = (\alpha_1, \beta_1) \quad , \quad \overrightarrow{oM_2} = (\alpha_2, \beta_2)$$

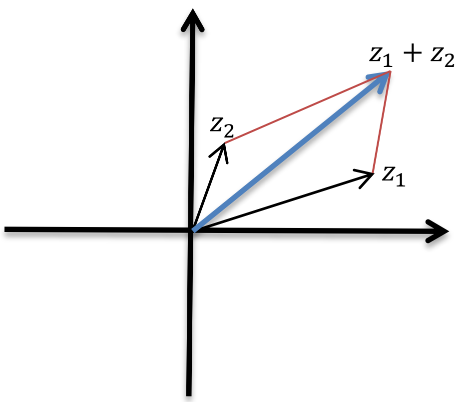
$$\overrightarrow{oM} = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$$

من الواضح أن $\overrightarrow{oM_1} + \overrightarrow{oM_2} = \overrightarrow{oM}$

إن مجموع الشعاعين الممثلين لـ $\mathfrak{z}_1 , \mathfrak{z}_2$ على الترتيب هو محصلة الشعاعين $\overrightarrow{oM_1} , \overrightarrow{oM_2}$

*للحصول على مجموع شعاعين هندسياَ حسب قاعدة متوازي أضلاع

نأخذ القطر الرئيسي

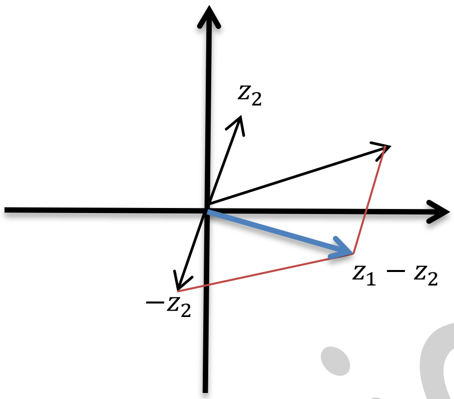


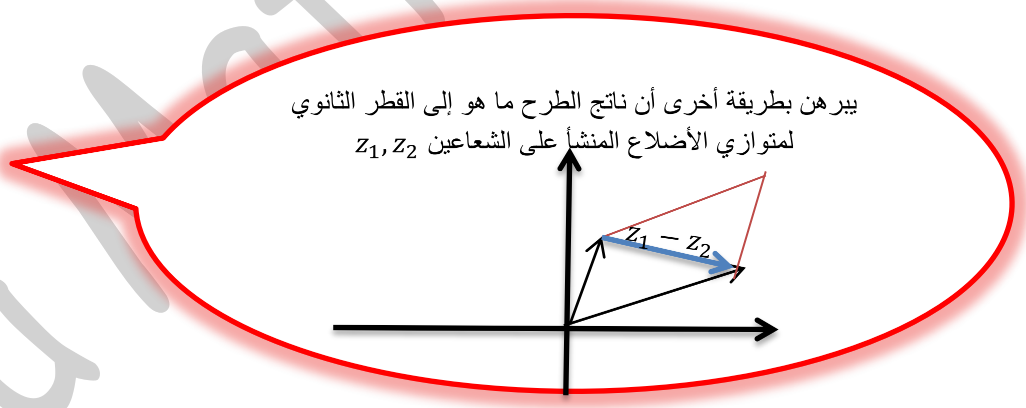
* طريقة أخرى للحصول على مجموع شعاعين

هندسياً هي أن نرسم من نهاية $\mathfrak{z}_1$ خط مساير لـ $\mathfrak{z}_2$ ثم أصل بداية الأول مع نهاية الثاني

تمرين : ماذا يمثل الفرق $\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2$ هندسياً ؟؟

بشكل مماثل لو أخذنا الشعاع $\overrightarrow{OM_1} = (\alpha_1, \beta_1)$ ممثلاً للعدد العقدي $z_1 = \alpha_1 + i\beta$ كذلك $\overrightarrow{OM_2} = (\alpha_2, \beta_2)$ و عليه يكون الشعاع $-\overrightarrow{OM_2} = (-\alpha_2, -\beta_2)$ ممثلاً للعدد العقدي $-\mathfrak{z}_2 = -\alpha_2 - i\beta_2$ و بالتالي يكون حاصل الفرق المطلوب ما هو إلى مجموع الشعاعين $\overrightarrow{OM_1} \& -\overrightarrow{OM_2}$ كما هو موضح بالشكل :





تذكرة : لكل عدد عقدي نظير وعندما نقول نظير فنقصد نظير بالنسبة لعملية الجمع لكن إذا أردنا بكلمة نظير المقلوب فلابد أن نقول نظير ضربي

ملاحظة : عملية القسمة في مجموعة الأعداد العقدية هي عملية الضرب بالمقلوب أي : $\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2} = \mathfrak{z}_1 . \mathfrak{z}_2^{-1}$

مرافق عدد عقدي :

إن مرافق عدد عقدي $\mathfrak{z} = \alpha + i\beta$ هو بالتعريف $\bar{\mathfrak{z}} = \alpha - i\beta$ أي نحصل عليه بتغيير إشارة الجزء التخيلي

أمثلة : $\overline{2-5i} = 2+5i \quad \& \quad \overline{1+3i} = 1-3i$

خواص مرافق عدد عقدي :

1) $\overline{\overline{z}} = z$ (مرافق المرافق هو العدد نفسه)

2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ (مرافق مجموع هو مجموع المرافقين)

3) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$ (مرافق جداء هو جداء المرافقين)

4) $\left(\overline{z^{-1}}\right) = (\overline{z})^{-1}$ (مرافق مقلوب هو مقلوب المرافق)

5) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

6) $z.\overline{z} = (Re z)^2 + (Im z)^2 = |z|^2$

سنتعرف على مفهوم طويلة عدد عقدي قريباً

7) $z + \overline{z} = 2\,Re z \quad \& \quad z - \overline{z} = 2(Im z)\,i$

تمرين : اكتب العدد العقدي $\frac{1+2i}{-2+5i}$ بالشكل الجبري:

الحل

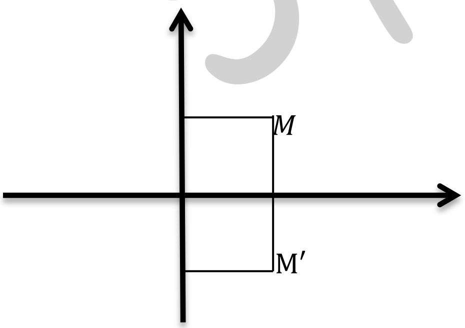
سنضرب كلاً من البسط و المقام بمرافق المقام :

$$\frac{1+2i}{-2+5i} = \frac{(1+2i)(-2-5i)}{(-2+5i)(-2-5i)} = \frac{(1+2i)(-2-5i)}{(-2)^2+(5)^2} = \frac{8-9i}{29} = \frac{8}{29} - \frac{9}{29}i$$

تمرين وظيفة : ماذا يعني هندسياً التابع الذي يقرن كل عدد عقدي بمرافقة ؟؟

بفرض $z = \alpha + \beta i$ عدد عقدي فيكون المرافق $\overline{z} = \alpha - \beta i$

هذا التابع هو أحد التحويلات الهندسية بالنسبة للمحور الحقيقي ox (متناظر بالنسبة للمحور الحقيقي ox) إذ يحافظ على فواصل النقطة الممثلة للعدد العقدي و يعكس اشارة تراتيبها



انتهت المحاضرة

إعداد: ميار طعمة – شهناز طاطيش – يمنى خرما