

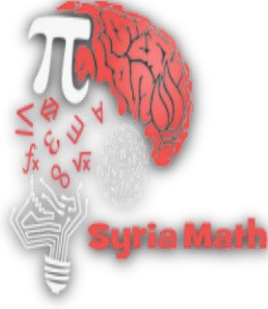
18-10-2017

نظري

◀ دكتورة المادة: نور غازي

عنوان المحاضرة: مبرهنات التماثل

◀ المحاضرة: الخامسة



المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- المبرهنة الأساسية .

٢- مبرهنات التماثل .

نتيجة : (عن المبرهنة الأخيرة في المحاضرة ٤) : كل مودول جزئي من مودولات الخارج M/N هو من الشكل P/N بحيث $N \subseteq P \subseteq M$.

أمثلة على مودولات الخارج :

- اذا كان لدينا \mathbb{Z} مودول على نفسه وكان لدينا $2\mathbb{Z}$ مودول جزئي من \mathbb{Z} فإن

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{z + 2\mathbb{Z} : z \in \mathbb{Z}\}$$

- اذا كان \mathbb{Q} مودول على \mathbb{Z} و \mathbb{Z} مودول جزئي من \mathbb{Q} فإن $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{\alpha + \mathbb{Z} : \alpha \in \mathbb{Q}\}$

- اذا كان \mathbb{R} مودول على \mathbb{Z} و \mathbb{Z} مودول جزئي من \mathbb{R} فإن $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{r + \mathbb{Z} : r \in \mathbb{R}\}$

المبرهنة الأساسية : ليكن $f : M \rightarrow N$ تشاكل مودولي وليكن P مودول جزئي من M بحيث $P \subseteq \ker f$

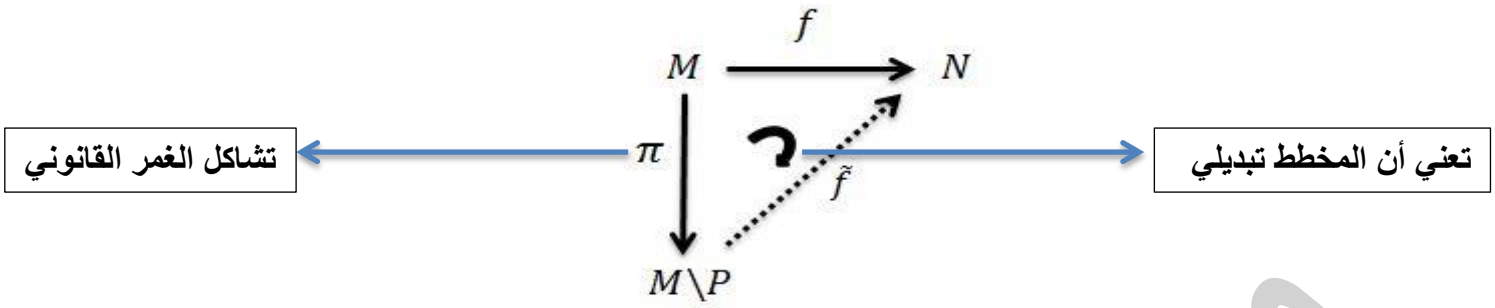
عندها يوجد تشاكل مودولي $\tilde{f} : M/P \rightarrow N$ بحيث يحقق مايلي :

$$\tilde{f} \circ \pi = f \quad (١)$$

(٢) وحيد بحيث يحقق الشرط السابق.

$$\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{P} \quad (٣)$$

$$\text{Im} \tilde{f} = \text{Im} f \quad (٤)$$



البرهان :

$\tilde{f} : M/P \rightarrow N$ لنفرض العلاقة

$$m + P \rightarrow \tilde{f}(m + P) = f(m)$$

$$\forall m_1 + P, m_2 + P \in M/P, \forall \alpha, \beta \in A, \forall m_1, m_2 \in M$$

\tilde{f} تطبيق لأن : اذا كان $m_1 + P = m_2 + P$ نضيف للطرفين $-m_2 + P$

$$(m_1 - m_2) + P = P \Rightarrow m_1 - m_2 \in \underbrace{P \subseteq \ker f}_{\text{فرضاً}}$$

$$\Rightarrow f(m_1 - m_2) = 0$$

وبما أن f تشاكل فإن : $f(m_1) = f(m_2)$ ومنه $\tilde{f}(m_1 + P) = \tilde{f}(m_2 + P)$

\tilde{f} تشاكل مودولي لأن : $\tilde{f}(a(m_1 + P) + \beta(m_2 + P)) = \tilde{f}((am_1 + \beta m_2) + P)$

$$= f(am_1 + \beta m_2) = af(m_1) + \beta f(m_2) = a\tilde{f}(m_1 + P) + \beta\tilde{f}(m_2 + P)$$

والان لنثبت أن :

$$\forall m \in M : \tilde{f} \circ \pi(m) = \tilde{f}(m + P) = f(m) \quad .1$$

$$\Rightarrow \tilde{f} \circ \pi = f$$

.2. إن \tilde{f} وحيد دوماً وذلك اذا فقط اذا كان $\tilde{f} \circ \pi = f$

$$\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{P} \quad .3$$

حسب تعريف النواة $\ker \tilde{f}$ (مجموعة عناصر المنطلق التي صورها وفق التطبيق \tilde{f} هي صفر المستقر).



$$\ker \tilde{f} = \left\{ m + P \in M/P : \underbrace{\tilde{f}(m + P) = f(m)}_{\text{قاعدة الربط}} = 0 \right\}$$

$$= \{ m + P \in M/P : f(m) = 0 \}$$

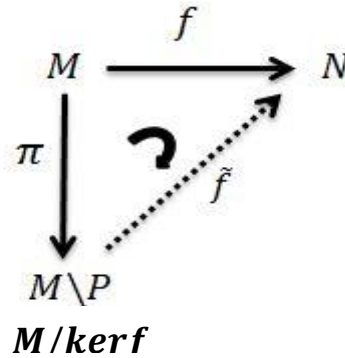
$$= \{ m + P \in M/P ; m \in \ker f \} = \frac{\ker f}{P}$$

$$\begin{aligned} \text{Im} \tilde{f} &= \left\{ \tilde{f}(m + P) ; m + P \in \frac{M}{P} \right\} \\ &= \{ f(m) ; m \in M \} = \text{Im} f \end{aligned}$$

ملاحظة : اذا كان $f : M \rightarrow N$ تشاكل + تقابل عندها يكون f تماثل ويكتب $M \cong N$

مبرهنة التماثل الأولى : ليكن $f : M \rightarrow N$ تشاكل مودولي عندئذ يوجد تماثل $\frac{M}{\ker f} \cong \text{Im} f$

البرهان :



لنأخذ $P = \ker f$ في المبرهنة الاساسية فإنه يوجد تشاكل مودولي $\tilde{f} : M/\ker f \rightarrow N$ يحقق :

$$\tilde{f} \circ \pi = f \quad (1)$$

$$\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{P} = \frac{\ker f}{\ker f} = 0 + \ker f = 0_{M/\ker f} \quad (2)$$

$$\text{Im} \tilde{f} = \text{Im} f \quad (3)$$

ومنه اصبح لدينا $\tilde{f} : M/\ker f \rightarrow N$ تشاكل مودولي متباين

ومنه $\tilde{f} : M/\ker f \rightarrow \text{Im} \tilde{f}$ تشاكل مودولي متباين و غامر (غامر لأننا أخذنا المستقر الفعلي).

$$\frac{M}{\ker f} \cong \text{Im} f \iff \text{Im} \tilde{f} = \text{Im} f \quad \text{ولدينا} \quad M/\ker f \cong \text{Im} \tilde{f} \iff$$

ملاحظة : اذا كان f غامر فإن $\frac{M}{\ker f} \cong N$.

حل بطريقة ثانية : (وظيفة) :

لنأخذ $\varphi: M/\ker f \rightarrow \text{Im} f$ المعرف بالشكل التالي :

$$\varphi(x + \ker f) = f(x) : \forall x \in M$$

بما أن كل مودول هو زمرة تبديلية فالعلاقة φ تماثلاً زمرياً ولإتمام البرهان يكفي أن نثبت أن φ يحقق الشرط الثاني من شرطي التماثل المودولي (لان الشرط الأول هو نفسه شرط التماثل الزمري) ومنه

$$\forall x + \ker f \in M/\ker f , \quad a \in A$$

$$\varphi(a(x + \ker f)) = \varphi(ax + \ker f) = f(a.x) = a.f(x) = a.\varphi(x + \ker f)$$

$$\frac{M}{\ker f} \cong \text{Im} f \text{ ومنه } \varphi \text{ تماثل مودولي أي } \frac{M}{\ker f} \cong \text{Im} f$$

تنوية : ليكن M مودول على A وليكن N_1, N_2 مودولين جزئيين من M بحيث $N_1 \subseteq N_2$ عندها يمكن بسهولة برهان أن N_1 مودول جزئي من N_2 .

مبرهنة التماثل الثانية : ليكن M مودول على A ولنأخذ N_2, N_1 مودولين جزئيين من M بحيث $N_1 \subseteq N_2$ عندئذ :

$$\frac{M/N_1}{N_2/N_1} \cong \frac{M}{N_2}$$

البرهان :

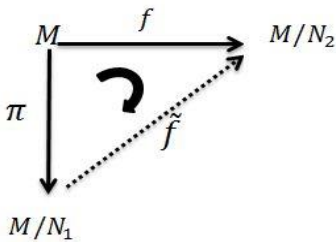
لدينا تماثل الغمر القانوني : $f : M \rightarrow M/N_2$

$$m \rightarrow m + N_2$$

بما أنه تماثل غمر قانوني فإن : $(\text{Im} f = M/N_2)$ ونواته هي : $\ker f = N_2$

ولكن : $N_1 \subseteq N_2 = \ker f$ (أي أن N_1 مودول جزئي من N_2 وذلك حسب التنويه السابق .)

فحسب المبرهنة الأساسية فإنه يوجد تماثل مودولي $\tilde{f} : \frac{M}{N_1} \rightarrow \frac{M}{N_2}$ **بحيث :**



$$\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{N_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\text{Im} \tilde{f} = \text{Im} f_{\text{غمر}} = M/N_2 \Rightarrow \text{Im} \tilde{f} = \frac{M}{N_2}$$

ومنه \tilde{f} تماثل مودولي وغامر وحسب مبرهنة التماثل الأولى فإن

$$\frac{M/N_1}{N_2/N_1} \cong \frac{M}{N_2}$$

مبرهنة التماثل الثالثة: ليكن M مودول على A و N_1, N_2 مودولين جزئيين من M عندها :

$$\frac{N_1 + N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2}$$

البرهان :

إن N_1, N_2 مودولين جزئيين من $M \iff N_1 + N_2$ وأيضا $N_1 \cap N_2$ مودولات جزئية من M .

ولدينا $N_1 \cap N_2 \subseteq N_2$ (مودول جزئي من N_2 وذلك حسب التنويه السابق).

ولدينا $N_1 \subseteq N_1 + N_2$ (مودول جزئي من $N_1 + N_2$ وذلك حسب التنويه السابق).

بالتالي كلاً من $\frac{N_2}{N_1 \cap N_2}$ و $\frac{N_1 + N_2}{N_1}$ معرفين ومودولات على A

لنبني التشاكل : $f : N_2 \rightarrow \frac{N_1 + N_2}{N_1}$ حيث f هو تركيب تشاكليين.

$$n_2 \rightarrow n_2 + N_1$$

$$N_2 \rightarrow N_1 + N_2 \rightarrow \frac{N_1 + N_2}{N_1}$$

$$n_2 \rightarrow 0 + n_2$$

$$n_1 + n_2 \rightarrow (n_1 + n_2) + N_1 = \underbrace{n_2 + N_1}_{\text{وذلك لان } n_1 \in N_1}$$

إذاً : $f : N_2 \rightarrow \frac{N_1 + N_2}{N_1}$ تشاكل مودولي لأنه تركيب تشاكليين مودوليين.

$$n_2 \rightarrow n_2 + N_1$$

لنبرهن أنه غامر :

$$\forall n_1 + n_2 + N_1 \in \frac{N_1 + N_2}{N_1} : n_1 \in N_1, n_2 \in N_2$$

$$n_1 + n_2 + N_1 = n_2 + N_1$$

$$\exists n_2 \in N_2 ; f(n_2) = n_2 + N_1 = n_1 + n_2 + N_1$$

$$\frac{N_1 + N_2}{N_1} = \text{Im} f \text{ ومنه}$$

$$\ker f = \{ n_2 \in N_2 : f(n_2) = n_2 + N_1 = N_1 \}$$

وأن

$$= \{ n_2 \in N_2 : n_2 \in N_1 \} = N_1 \cap N_2$$

نعوض ما سبق وباستخدام مبرهنة التماثل الأولى والتي تنص على

$$\frac{M}{\ker f} \cong \text{Im} f \quad \text{ليكن } f : M \rightarrow N \text{ تشاكل مودولي عندئذ يوجد تماثل}$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1 \cap N_2} \cong \frac{N_1 + N_2}{N_1} = \text{Im} f$$

ويتم المطلوب

انتهت المحاضرة

تمرين : وظيفة المحاضرة السابقة :

ليكن $f : M \rightarrow N$ و $g : N \rightarrow P$ حيث f, g تشاكلان مودولين عندئذ أثبت ما يلي :

- (١) $g \circ f$ هو تشاكل مودولي .
- (٢) إذا كان g, f كل منهما غامر $\Leftrightarrow g \circ f$ غامر .
- (٣) إذا كان g, f كل منهما متباين $\Leftrightarrow g \circ f$ متباين .
- (٤) $g \circ f$ هو تشاكل غامر $\Leftrightarrow g$ غامر .
- (٥) $g \circ f$ متباين $\Leftrightarrow f$ متباين .

الحل :

(١) لنأخذ التطبيق $g \circ f : M \rightarrow P$

$$\forall m, m_1, m_2 \in M, a \in A$$

$$\begin{aligned} g \circ f(m_1 + m_2) &= g(f(m_1 + m_2)) = g\left(\underbrace{(f(m_1) + f(m_2))}_{\text{لان } f \text{ تشاكل}}\right) \\ &= \underbrace{g(f(m_1) + gf(m_2))}_{\text{لان } g \text{ تشاكل}} = (g \circ f)(m_1) + (g \circ f)(m_2) \end{aligned}$$

لنثبت الشرط الثاني

$$\begin{aligned} g \circ f(am_1) &= g(f(am_1)) = g(af(m_1)) \\ &= a g(f(m_1)) = a(g \circ f)(m_1) \end{aligned}$$

(٢) بما أن f و g غامر فإن

$$\forall p \in P ; \exists n \in N : g(n) = p$$

$$\forall n \in N ; \exists m \in M : f(m) = n$$

ليكن $p \in P$ ولنوجد عنصر صورته تساوي p (العنصر من M لان المطلوب ان نثبت انه غامر هو $g \circ f$ ومنطقه هو M).

$$\exists m \in M : g \circ f(m) = g(f(m)) = g(n) = p$$

ومنه $g \circ f$ غامر .

(٣) بما أن f و g متباين فإن:

$$\forall m_1, m_2 \in M : f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$$

$$\forall n_1, n_2 \in N : g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$$

لنفرض أن

$$g \circ f(m_1) = g \circ f(m_2) : \forall m_1, m_2 \in M$$

$$\Rightarrow g(f(m_1)) = g(f(m_2))$$

وبما أن g متباين فإن $f(m_1) = f(m_2)$

وأن f متباين

$$\Rightarrow m_1 = m_2$$

(٤) ليكن $p \in P$ ولنوجد عنصر صورته تساوي p (العنصر من N لان المطلوب ان نثبت انه غامر هو g ومنطلقه هو N).

وبما أن $f \circ g$ غامر فرضاً فإن يوجد $m \in M$ بحيث $f \circ g(m) = p$ أي أن $g(f(m)) = p$

ومنه يوجد عنصر $f(m) \in N$ بحيث صورته وفق g هو p ومنه g غامر

(٥) إن f متباين لان :

$$\forall m_1, m_2 \in M : f(m_1) = f(m_2)$$

وبما أن $f(m_1), f(m_2) \in N$ سنأخذ الصورة المباشرة وفق g

$$g(f(m_1)) = g(f(m_2))$$

$$g \circ f(m_1) = g \circ f(m_2)$$

$$\Rightarrow m_1 = m_2$$

وأن $f \circ g$ متباين

وبذلك يتم المطلوب

إعداد: لبنى الطون - احمد أبو النوت - شهد الحايك البوشي