نظري

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄المحاضرة : الخامسة   عنوان المحاضرة: مبرهنات التماثل

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـالمبرهنة الأساسية .

٢ـمبرهنات التماثل .

نتيجة :(عن المبرهنة الأخيرة في المحاضرة ٤) : كل مودول جزئي من مودولات الخارج M/N هو من الشكل P/N بحيث $N \subseteq P \subseteq M$.

أمثلة على مودولات الخارج :

- اذا كان لدين ا$\mathbb{Z}$ مودول على نفسة وكان لدينا $2\mathbb{Z}$ مودول جزئي من $\mathbb{Z}$ فإن

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{z + 2\mathbb{Z} \ : z \in \mathbb{Z}\}$$

- اذا كان $\mathbb{Q}$ مودول على $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}$ مودول جزئي من $\mathbb{Q}$ فإن $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{\alpha + \mathbb{Z} \ : \ \alpha \in \mathbb{Q}\}$
- اذا كان $\mathbb{R}$ مودول على $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}$ مودول جزئي من $\mathbb{R}$ فإن$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{r + \mathbb{Z} \ : \ r \in \mathbb{R}\}$

المبرهنة الأساسية : ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكل مودولي وليكن P مودول جزئي من M بحيث $P \subseteq kerf$

عندها يوجد تشاكل مودولي $\tilde{f} : M/P \longrightarrow N$ بحيث يحقق مايلي :

١) $\tilde{f} \circ \pi = f$

٢) وحيد بحيث يحقق الشرط السابق.

٣) $ker\tilde{f} = \frac{kerf}{P}$

٤) $Im\tilde{f} = Imf$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M\backslash P \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

تشاكل الغمر القانوني

تعني أن المخطط تبديلي

البرهان :

لنفرض العلاقة $\tilde{f} : M/P \longrightarrow N$

$$m + P \longrightarrow \tilde{f}(m + P) = f(m)$$

$$\forall m_1 + P, m_2 + P \in M/P \quad , \forall a, \beta \in A \ , \forall m_1, m_2 \in M$$

$\tilde{f}$ تطبيق لأن : اذا كان $m_1 + P = m_2 + P$ نضيف للطرفين $-m_2 + P$

$$(m_1 - m_2) + P = P \quad \Rightarrow m_1 - m_2 \ \in \underbrace{P \subseteq kerf}_{\text{فرضاً}}$$

$$\Rightarrow f(m_1 - m_2) = 0$$

وبما أن f تشاكل فإن : $f(m_1) = f(m_2)$ ومنه $\tilde{f}(m_1 + P) = \tilde{f}(m_2 + P)$

$\tilde{f}$ تشاكل مودولي لأن : $\tilde{f}\big(a(m_1 + P) + \beta(m_2 + P)\big) = \tilde{f}\big((am_1 + \beta m_2) + P\big)$

$$= f(am_1 + \beta m_2) = af(m_1) + \beta f(m_2) = a\tilde{f}(m_1 + P) + \beta\tilde{f}(m_2 + P)$$

والان لنثبت أن :

١. $\forall \ m \in M \ : \ \tilde{f} \circ \pi(m) = \tilde{f}(m + P) = f(m)$

$$\Rightarrow \tilde{f} \circ \pi = f$$

٢. إن $\tilde{f}$ وحيد دوماً وذلك اذا وفقط اذا كان $\tilde{f} \circ \pi = f$

٣. $ker\tilde{f} = \frac{kerf}{P}$

حسب تعريف النواة $ker\tilde{f}$ (مجموعة عناصر المنطلق التي صورها وفق التطبيق $\tilde{f}$ هي صفر المستقر).

$$ker\tilde{f} = \left\{ m+P \in M/P \;:\; \underbrace{\tilde{f}(m+P) = f(m)}_{\text{قاعدة الربط}} = 0 \right\}$$
$$= \{ m+P \in M/P \;:\; f(m) = 0 \}$$
$$= \{ m+P \in M/P \;;\; m \in kerf \} = \frac{kerf}{P}$$

٤. $$Im\tilde{f} = \left\{ \tilde{f}(m+P) \;;\; m+P \in \frac{M}{P} \right\}$$
$$= \{ f(m) \;;\; m \in M \} = Imf$$

ملاحظة : اذا كان $f : M \longrightarrow N$ تشاكل + تقابل عندها يكون f تماثل ويكتب $M \cong N$

مبرهنة التماثل الأولى : ليكن $f : M \longrightarrow N$ تشاكل مودولي عندئذ يوجد تماثل $\frac{M}{kerf} \cong Imf$

البرهان :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M\backslash P \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\boldsymbol{M/kerf}$

لنأخذ $P = kerf$ في المبرهنة الاساسية فإنه يوجد تشاكل مودولي $\tilde{f} : M/kerf \longrightarrow N$ يحقق :

١) $\tilde{f} \circ \pi = f$

٢) $ker\tilde{f} = \frac{kerf}{P} = \frac{kerf}{kerf} = 0 + kerf = 0_{M/kerf}$ أي أن $\tilde{f}$ متباين

٣) $Im\tilde{f} = Imf$

ومنه اصبح لدينا $\tilde{f} : M/kerf \longrightarrow N$ تشاكل مودولي متباين

ومنه $\tilde{f} : M/kerf \longrightarrow Im\tilde{f}$ تشاكل مودولي متباين و غامر (غامر لأننا أخذنا المستقر الفعلي).

$\Leftarrow M/kerf \cong Im\tilde{f}$ ولدينا $Im\tilde{f} = Imf \Leftarrow \frac{M}{kerf} \cong Imf$

ملاحظة : اذا كان f غامر فإن $\frac{M}{kerf} \cong N$.

حل بطريقة ثانية : (وظيفة):

لنأخذ $\varphi: M/kerf \longrightarrow Imf$ المعرف بالشكل التالي :

$$\varphi(x + kerf) = f(x) \;:\; \forall x \in M$$

بما أن كل مودول هو زمرة تبديلية فالعلاقة φ **تماثلاً زمرياً** ولإتمام البرهان يكفي أن نثبت أن φ يحقق الشرط الثاني من شرطي التشاكل المودولي (لان الشرط الأول هو نفسة شرط التشاكل الزمري) ومنه

$$\forall x + kerf \in M/kerf \quad , \quad a \in A$$

$$\varphi(a(x + kerf)) = \varphi(ax + kerf) = f(a.x) = a.f(x) = a.\varphi(x + kerf)$$

ومنه φ تماثل مودولي أي $\frac{M}{kerf} \cong Imf$

تنوية : ليكن M مودول على A وليكن N_1 , N_2 مودولين جزئيين من M بحيث $N_1 \subseteq N_2$ عندها يمكن بسهولة برهان أن N_1 مودول جزئي من N_2 .

مبرهنة التماثل الثانية : ليكن M مودول على A ولنأخذ N_2, N_1 مودولين جزئيين من M بحيث $N_1 \subseteq N_2$ عندئذ :

$$\frac{M/N1}{N_2/N1} \cong \frac{M}{N_2}$$

البرهان :

لدينا تشاكل الغمر القانوني : $f : M \longrightarrow M/N_2$

$$m \longrightarrow m + N_2$$

بما أنه تشاكل غمر قانوني فإن : $((Imf = M/N_2))$ ونواته هي : $kerf = N_2$

ولكن : $N_1 \subseteq N_2 = kerf$ (أي أن N_1 مودول جزئي من N_2 وذلك حسب التنويه السابق).

فحسب المبرهنة الاساسية فإنه يوجد تشاكل مودولي $\tilde{f} : \frac{M}{N_1} \longrightarrow \frac{M}{N_2}$ **بحيث :**

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M/N_2 \\ M/N_1 \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$$ker\tilde{f} = \frac{kerf}{N_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$Im\tilde{f} = Im \underbrace{f}_{\text{لان } f \text{ غامر}} = M/N_2 \Longrightarrow Im\tilde{f} = \frac{M}{N_2}$$

ومنه $\tilde{f}$ تشاكل مودولي وغامر وحسب مبرهنة التماثل الأولى فإن

$$\frac{M/N1}{N_2/N1} \cong \frac{M}{N_2}$$

مبرهنة التماثل الثالثة: ليكن M مودول على A و N_1 , N_2 مودولين جزئيين من M عندها :

$$\frac{N_1 + N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2}$$

البرهان :

إن N_1 , N_2 مودولين جزئيين من M $\Leftarrow$ $N_1 + N_2$ وأيضا $N_1 \cap N_2$ مودولات جزئية من M .

ولدينا $N_1 \cap N_2 \subseteq N_2$ ($N_1 \cap N_2$ مودول جزئي من N_2 وذلك حسب التنويه السابق).

ولدينا $N_1 \subseteq N_1 + N_2$ (N_1 مودول جزئي من $N_1 + N_2$ وذلك حسب التنويه السابق).

بالتالي كلاً من $\frac{N_1+N_2}{N_1}$ و $\frac{N_2}{N_1 \cap N_2}$ معرفين ومودولات على A

لنبني التشاكل : $f : N_2 \longrightarrow \frac{N_1+N_2}{N_1}$ حيث f هو تركيب تشاكلين.

$$n_2 \to n_2 + N_1$$

$$N_2 \longrightarrow N_1 + N_2 \longrightarrow \frac{N_1 + N_2}{N_1}$$

$$n_2 \longrightarrow 0 + n_2$$

$$n_1 + n_2 \longrightarrow (n_1 + n_2) + N_1 = \underbrace{n_2 + N_1}_{\text{وذلك لأن } n_1 \in N_1}$$

إذاً : $f : N_2 \longrightarrow \frac{N_1+N_2}{N_1}$ تشاكل مودولي لأنه تركيب تشاكلين مودوليين.

$$n_2 \longrightarrow n_2 + N_1$$

لنبرهن أنه غامر :

$$\forall\, n_1 + n_2 + N_1 \in \frac{N_1 + N_2}{N_1} : n_1 \in N_1 , n_2 \in N_2$$

$$n_1 + n_2 + N_1 = n_2 + N_1$$

$$\exists\, n_2 \in N_2 \;;\; f(n_2) = n_2 + N_1 = n_1 + n_2 + N_1$$

ومنه $\frac{N_1+N_2}{N_1} = Imf$

وأن $kerf = \{ n_2 \in N_2 \;:\; f(n_2) = n_2 + N_1 = N_1 \}$

$$= \{ n_2 \in N_2 \;:\; n_2 \in N_1 \} = N_1 \cap N_2$$

نعوض ما سبق وباستخدام مبرهنة التماثل الأولى والتي تنص على

ليكن $N \longrightarrow M : f$ تشاكل مودولي عندئذ يوجد تماثل $\frac{M}{kerf} \cong Imf$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1 \cap N_2} \cong \frac{N_1 + N_2}{N_1} = Imf$$

ويتم المطلوب

انتهت المحاضرة

تمرين : وظيفة المحاضرة السابقة :

ليكن$f : M \longrightarrow N$ و $g : N \longrightarrow P$ حيث f, g تشاكلان مودوليين عندئذ أثبت ما يلي :

١) $g \circ f$ هو تشاكل مودولي .
٢) إذا كان g, f كل منهما غامر $\Leftarrow$ $g \circ f$ غامر .
٣) إذا كان g, f كل منهما متباين $\Leftarrow$ $g \circ f$ متباين .
٤) $g \circ f$ هو تشاكل غامر $\Leftarrow$ g غامر .
٥) $g \circ f$ متباين $\Leftarrow$ f متباين .

الحل :

١) لنأخذ التطبيق $g \circ f : M \longrightarrow P$

$$\forall m, m_1, m_2 \in M \quad , \quad a \in A$$

$$g \circ f(m_1 + m_2) = g(f(m_1 + m_2)) = g\left(\underbrace{(f(m_1) + f(m_2))}_{\text{لان } f \text{ تشاكل}}\right)$$

$$= \underbrace{g(f(m_1) + gf(m_2))}_{\text{لان } g \text{ تشاكل}} = (g \circ f)(m_1) + (g \circ f)(m_2)$$

لنثبت الشرط الثاني

$$g \circ f(am_1) = g(f(am_1)) = g(af(m_1))$$
$$= a\, g(f(m_1)) = a(g \circ f)(m_1)$$

٢) بما أن f و g غامر فإن

$$\forall p \in P \;\; ; \;\; \exists n \in N \quad : g(n) = p$$
$$\forall n \in N \;\; ; \;\; \exists m \in M \quad : f(m) = n$$

ليكن $p \in P$ ولنوجد عنصر صورته تساوي p (العنصر من M لان المطلوب ان نثبت انه غامر هو $g \circ f$ ومنطلقه هو M).

$$\exists m \in M \quad : g \circ f(m) = g\big(f(m)\big) = g(n) = p$$

ومنه $g \circ f$ غامر .

٣) بما أن f و g متباين فإن:

$$\forall m_1, m_2 \in M : f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$$

$$\forall n_1, n_2 \in N : g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$$

لنفرض أن

$$g \circ f(m_1) = g \circ f(m_2) \quad : \quad \forall m_1, m_2 \in M$$

$$\Rightarrow g\big(f(m_1)\big) = g\big(f(m_2)\big)$$

وبما أن g متباين فإن $f(m_1) = f(m_2)$

وأن f متباين

$$\Rightarrow m_1 = m_2$$

٤) ليكن $p \in P$ ولنوجد عنصر صورته تساوي p (العنصر من N لان المطلوب ان نثبت انه غامر هو g ومنطلقه هو N) .

وبمان أن $g \circ f$ غامر فرضاً فإن يوجد $m \in M$ بحيث $g \circ f(m) = p$ أي أن $g\big(f(m)\big) = p$

ومنه يوجد عنصر $f(m) \in N$ بحيث صورته وفق g هو p ومنه g غامر

٥) إن f متباين لان :

$$\forall m_1, m_2 \in M : f(m_1) = f(m_2)$$

وبما أن $f(m_1), f(m_2) \in N$ سنأخذ الصورة المباشرة وفق g

$$g\big(f(m_1)\big) = g\big(f(m_2)\big)$$

$$g \circ f(m_1) = g \circ f(m_2)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{وأن } g\circ f \text{ متباين}} \quad m_1 = m_2$$

<u>وبذلك يتم المطلوب</u>

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو التوت – شهد الحايك البوشي