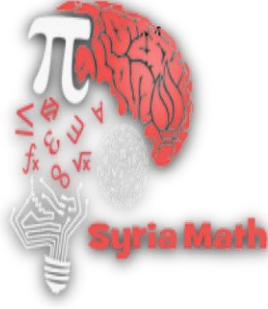


24-10-2017

نظري

◀ دكتور المادة: حمزة الحاكمي

◀ المحاضرة: الثامنة ◀ عنوان المحاضرة: المرافقات



المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- تعريف المرافقات والدليل.

٢- دراسة خواص المرافقات.

٣- مبرهنة لاغرانج.

المرافقات

تعريف المرافقات والدليل: لتكن G زمرة و A, B مجموعات جزئية وغير خالية في G نسمي المجموعة :

$$A.B = \{a.b : a \in A, b \in B\}$$

جداء المجموعتين A و B في G .

- اذا كانت $A = \{a\}$ عندئذ :

$$A.B = a.B = \{a.b : b \in B\}$$

- واذا كانت $B = \{b\}$ عندئذ :

$$A.B = A.b = \{a.b : a \in A\}$$

تعريف: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G لأجل كل عنصر $a \in G$ عندئذ :

- نسمي المجموعة $a.H = \{a.h : h \in H\}$ مرافقة يسارية للزمرة الجزئية H في G مولدة بالعنصر a .

- نسمي المجموعة $H.a = \{h.a : h \in H\}$ مرافقة يمينية للزمرة الجزئية H في G مولدة بالعنصر a .

وفي حال كون G زمرة تبديلية فإن $a.H = H.a$.

مثال: لنأخذ زمرة الاعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع بالمقاس 9

لنأخذ الزمرة $Z_9 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ولنأخذ الزمرة الجزئية في Z_9 ولتكن $H = \{0,3,6\}$.

ولنوجد جميع المرافقات للزمرة الجزئية H والتي تحوي عنصر حيادي وهو $0 + H$.

$$0 + H = \{0,3,6\} = H$$

$$1 + H = \{1,4,7\}$$

$$2 + H = \{2,5,8\}$$

$$3 + H = \{3,6,0\} = H$$

$$4 + H = \{4,7,1\}$$

$$5 + H = \{5,8,2\}$$

$$6 + H = \{6,0,3\} = H$$

$$7 + H = \{7,1,4\}$$

$$8 + H = \{8,2,5\}$$

فتكون المرافقات هي : $0 + H = 3 + H = 6 + H = H$

$$1 + H = 4 + H = 7 + H$$

$$2 + H = 5 + H = 8 + H$$

نتج لدينا 9 مرافقات ، 3 منها مختلفات نأخذها بأصغر مولد $H, 1 + H, 2 + H$

سندرس خواص المرافقات (المجموعات التبديلية)

تمهيدية: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G و $\forall a, b \in G$ عندئذ :

$$\forall a \in G ; a \in aH \quad (1)$$

$$\forall a \in G : aH = H \Leftrightarrow a \in H \quad (2)$$

$$\forall a, b \in G ; \begin{cases} \text{إما } aH \cap bH = \emptyset \\ \text{أو } aH = bH \end{cases} \quad (3)$$

$$\forall a, b \in G \text{ فإن } aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}.a \in H \quad (4)$$

الإثبات :

(١) ليكن $a \in G$ عندئذ : $a = a \cdot \overset{\in H}{e} \in a.H$

(٢) " \Leftarrow " لنفرض أن $aH = H$ عندئذ : $e \in aH = H$
وبالتالي يوجد $h \in H$ بحيث $e = ah$ ومنه نضرب بمقلوب $h \leftarrow$ $a = h^{-1} \in H$
" \Leftarrow " الفرض أن $a \in H$ ان :

$$aH \subseteq H.H \subseteq H$$

$$H = a.a^{-1}H \subseteq aH$$

$$\Rightarrow aH = H$$

احتواء معاكس

(٣) لنفرض ان $a, b \in G$:

(أ) إذا كان $aH \cap bH = \emptyset$ يتم المطلوب .

لنفرض ان $aH \cap bH \neq \emptyset$ عندئذ يوجد $c \in aH \cap bH$

$$c \in aH ; \exists h_1 \in H : c = ah_1$$

$$c \in bH ; \exists h_2 \in H : c = bh_2$$

ليكن $x \in aH$ عندئذ يوجد $h_0 \in H$ بحيث $x = ah_0$

$$x = ah_0 = ch_1^{-1} \cdot h_0 \text{ ومنه}$$

$$= b(h_2 \cdot h_1^{-1} \cdot h_0) \in bH$$

$$\Rightarrow aH \subseteq bH$$

وليكن $y \in bH$ عندئذ $y = bh'$ حيث $h' \in H$

$$y = bh' = ch_2^{-1} \cdot h'$$

$$= a(h_1 \cdot h_2^{-1} \cdot h') \in aH$$

$$\Rightarrow bH \subseteq aH$$

$$\Rightarrow aH = bH$$

(٤) ليكن $a, b \in G$ " \Leftarrow " الفرض ان $b^{-1}a \in H$ عندئذ يوجد $h \in H$ بحيث $b^{-1}a = h$

$$\Rightarrow a = bh$$

$$aH = b(h.H) = bH$$

" \Rightarrow " الفرض ان $aH = bH$ عندئذ $a \in aH = bH$ ومنه يوجد $h_0 \in H$ بحيث $a = bh_0$

$$\Rightarrow b^{-1}a = h_0 \in H$$

تمهيدية: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G و $\forall a, b \in G$ عندئذ :

- (١) $\forall a, b \in G$ فإن $card\ aH = card\ bH = card\ H$
- (٢) $\forall a \in G; a \in H \Leftrightarrow aH = H$ زمرة جزئية في G
- (٣) عندما فقط عندما $\forall a, b \in G; H = aHb^{-1} \Leftrightarrow aH = Hb$
- (٤) لنفرض ان $M_l = \{aH: a \in G\}$, $M_r = \{Ha: a \in G\}$ عندئذ:
- (٥) كلاً من M_l, M_r يشكل تجزئة للزمرة G .

البرهان:

(١) ليكن $a, b \in G$ ، لنعرّف العلاقة:

$$f: aH \rightarrow bH$$

$$\forall ah \in aH, f(ah) = bh \in bH$$

ان f تطبيق متباين لأنه:

$$\forall ah_1, ah_2 \in aH$$

$$\Leftrightarrow ah_1 = ah_2$$

$$\Leftrightarrow bh_1 = bh_2$$

$$\Leftrightarrow f(ah_1) = f(ah_2)$$

ونلاحظ ايضاً ان f تطبيق غامر لأنه اذا كان $ah_0 \in aH, h_0 \in H$ فإن $bh_0 \in bH$

$$f(ah_0) = bh_0$$

وبهذا الشكل نجد أن : $card\ aH = card\ bH$

- اثبات مساواة مع $card\ H$ لأجل $e, a \in G$ فإن

$$card\ aH = card\ eH = card\ H$$

(٢) ليكن $a \in G$

" \Rightarrow " الفرض $a \in H$ عندئذ: حسب ٢ $aH = H$ وهي زمرة جزئية في G عندئذ $e \in aH$

ومنه يوجد $h \in H$ بحيث $e = ah$

$$\Rightarrow a = h^{-1} \in H$$

(٣) ليكن $a, b \in G$

" \Leftarrow " الفرض ان $aH = bH$ عندئذٍ :

$$aH = bH \text{ لان } aHb^{-1} = Hbb^{-1} = He = H$$

" \Rightarrow " الفرض ان $H = aHb^{-1}$ نضرب ب b

$$Hb = aHb^{-1}b = aH$$

(٤) لنعرّف العلاقة :

$$\phi: M_l \rightarrow M_r$$

$$\forall aH \in M_l ; \phi(aH) = Ha^{-1}$$

ان ϕ تطبيق لأنه اذا كان $aH, bH \in M_l$ بحيث $aH = bH$

فان $a \in bH$ لان $a \in aH$ ومنه يوجد $h \in H$ حيث $a = bh$

وبالتالي: $a^{-1} = (bh)^{-1} = h^{-1}b^{-1} \in Hb^{-1}$ وايضاً $a^{-1} \in Ha^{-1}$ (حسب ٣)

$$Ha^{-1} = Hb^{-1}$$

ومنه $\phi(aH) = \phi(bH)$ وتطبيق متباين

ليكن $Hc \in M_r$ عندئذٍ $c \in G$ ومنه $c^{-1} \in G$ وان $c^{-1}H \in M_l$

$$\phi(c^{-1}H) = H(c^{-1})^{-1} = Hc$$

-٥-

$$G = \bigcup_{a \in G} \{a\} \subseteq \bigcup_{a \in G} aH = \bigcup_{aH \in M_l} aH \subseteq G$$

$$\Rightarrow G = \bigcup_{aH \in M_l} aH$$

تعريف: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G ولنفرض ان $M_l = \{aH : a \in G\}$ مجموعة

المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية H في G نسمي المقدار $card M_l = card M_r$ بدليل الزمرة

الجزئية H في G ونرمز لذلك $(G:H) = card M_l$

وفي حال كان $H = \{e\}$ فان $(G:H) = (G:\{e\}) = (G:1)$

مبرهنة لاغرانج : لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية فيها عندئذ :

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

الإثبات :

لما كانت G منتهية . لنفرض ان عدد عناصر يساوي n (تحتوي n عنصر) ولنفرض ان: (جميع المرافقات اليسارية) a_1H, a_2H, \dots, a_nH للزمرة الجزئية H في G و $G = \bigcup_{i=1}^n a_iH$

$$\begin{aligned} \text{card } G &= \text{card } a_1H + \text{card } a_2H + \dots + \text{card } a_nH \\ &= \text{card } H + \text{card } H + \dots + \text{card } H \text{ (مرة } n) \end{aligned}$$

$$= \underbrace{n}_{\text{عدد المرافقات}} \underbrace{\text{card } H}_{\text{عدد عناصر } H}$$

$$\underbrace{(G:1)}_{\text{عدد عناصر } G} = n(H:1)$$

$$= \underbrace{(G:H)}_{\text{عدد مرافقات } H} (H:1)$$

ملاحظة: يمكن صياغة مبرهنة لاغرانج بأكثر من طريقة .

مثال: لأجل أي زمرة منتهية فإن مرتبة هذه الزمرة تقبل القسمة على مرتبة أي زمرة جزئية فيها وناتج القسمة هو الدليل في الزمرة المنتهية فإن مرتبة أي زمرة جزئية تقسم مرتبتها.

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريان جلو - ولاء الأخضر - هلا هج