◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄المحاضرة : السادسة عنوان المحاضرة: المتتاليات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـالمخططات التبديلية.

٢ـالمتتاليات التامة.

٣ـالمتتاليات القصيرة.

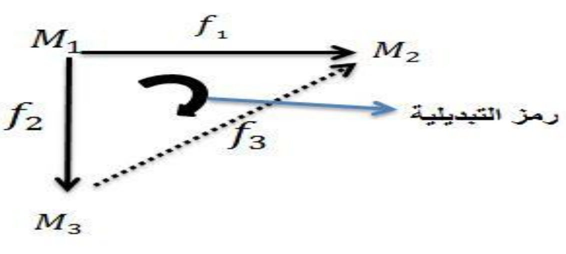
٤ـ مبرهنة الحية .

مبرهنة بدون برهان : ليكن M مودول على A ولنأخذ $N, \acute{N}, \acute{P}, P$ أربعة مودولات جزئية من M بحيث $N \subseteq P$ و $\acute{N} \subseteq \acute{P}$ عندئذ :

$$\frac{N + (P \cap \acute{P})}{N + (P \cap \acute{N})} \cong \frac{(P \cap \acute{P})}{(N \cap \acute{P}) + (P \cap \acute{N})} \cong \frac{\acute{N} + (P \cap \acute{P})}{\acute{N} + (N \cap \acute{P})}$$

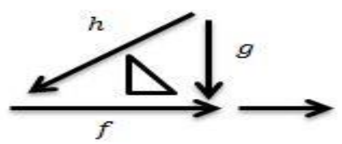
المخططات التبديلية

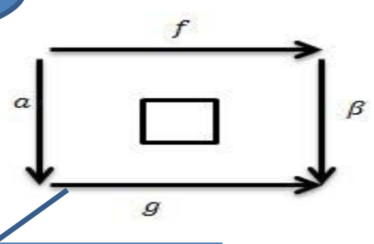
اذا كان لدينا $f_1: M_1 \to M_2$ و $f_2: M_1 \to M_3$ و $f_3: M_3 \to M_2$ ثلاث تشاكلات مودولية عندئذ هذه التشاكلات نستطيع أن نمثلها في مخططات تدعى مخططات تبديلية ولتكن بالشكل الموضح جانباً .

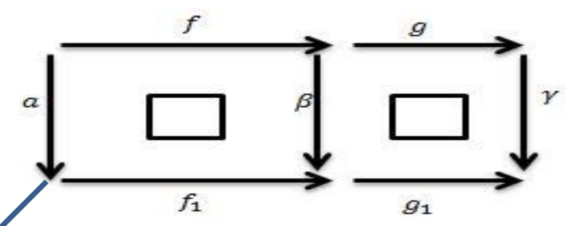


يمكن أن نمثل التشاكلات المودولية في عدة مخططات لها اشكال مختلفة موضحة بالاسفل .
واذا تحقق الشرط تكون تبديلية او يمكن وضع الرمز الذي في المنتصف .

اذا تحقق $foh = g$







$goa = \beta of$

$f_1 oa = \beta of \ \wedge g_1 o\beta = \gamma og$

- حيث يمكن أن نرمز لرمز التبديلية بأي رمز نختاره سواء مربع او مثلث او سهم دائري .
- ان ما سبق من مخططات تبديلية هي عشوائية وهي فقط من اجل وضع أمثلة أنه يمكن تركيب أكثر من مخطط تبديلي في نفس المخطط .
- عندما نقول عن مخطط انه تبديلي أي يجب ان نسير مع السهم واي طريقة نستخدمها نصل بها الي نفس النتيجة (البدء من أي سهم لا يوثرعلى المخطط التبديلي).

أي يمكن البدء في مثالنا الأول من M_3 ولكن مع الانتباه لاتجاه السهم .

المتتاليات التامة

تعريف : لتكن $\{ f_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}\}_{i\in I}$ أسرة من التشاكلات المودولية .

$$(*) \quad \dots \dots \xrightarrow{f_{i-2}} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \rightarrow \dots \dots$$

تدعى متتالية من التشاكلات المودولية .

- نقول عن المتتالية $(*)$ أنها تامة عند الحد M_{i+1} إذا :

$$Imf_i = kerf_{i+1}$$

- نقول عن المتتالية $(*)$ أنها تامة إذا كانت تامة عند كل حد من الحدود أي :

$$Imf_{i-1} = kerf_i \ ; \quad \forall i \in I$$

ملاحظة : حتى نقول عن متتالية أنها تامة عند حد ما يجب أن يكون هذا الحد متجه نحو سهم وخارج منه سهم .

مثال : لنأخذ المتتالية

$$0 \xrightarrow{f_1} 2\mathbb{Z} \xrightarrow{f_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{f_3} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{f_4} 0$$

$$0 \to 0$$

$$x \to x$$

$$x \to x + 2\mathbb{Z}$$

$$\bar{0} \to 0$$

أثبت أن هذه المتتالية تامة عند كل حد من حدودها .

الحل :

لكي تكون تامة يجب أن تكون تامة عند كل حد من حدودها ويجب أن نثبت أن :

$$Imf_i = kerf_{i+1}$$

- إن $f_1 : \ 0 \to 2\mathbb{Z}$

لنوجد الصورة المباشرة ل f_1 أي لنوجد Imf_1 ولكن f_1 تشاكل ومنه $f_1(0) = 0$ أي أن $Imf_1 = \{0\}$

(توضيح المنطلق عناصره هو الصفر فقط وصورة الصفر هو صفر لان التطبيق تشاكل ومنه الصورة المباشرة هي فقط الصفر).

لنأخذ التطبيق f_2 ولنحسب $kerf_2$

حيث: $f_2 :\ 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$x \to x$

لنوجد النواة ل f_2 أي لنوجد $kerf_2$ ولكن

$$kerf_2 = \{x \in 2\mathbb{Z} \ : f_2(x) = 0\} = \{x \in 2\mathbb{Z} \ : x = 0\} = \{0\}$$

(توضيح المنطلق عناصره هي جزئية من المستقر ومنه هذا يسمى التطبيق المطابق أي مجموعة العناصر التي صورتها صفر هي فقط الصفر).

ومنه

$$Imf_1 = kerf_2$$

- لنكمل الان ولنبرهن أن

$$Imf_2 = kerf_3$$

لنحسب Imf_2

$$Imf_2 = \{f_2(x) \ : \ x \in 2\mathbb{Z}\} = \{x \ : \ x \in 2\mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$$

لنأخذ التطبيق f_3 ولنحسب $kerf_3$

$$f_3 :\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$x \to x + 2\mathbb{Z}$$

إن f_3 هو تشاكل الغمر القانوني ومنه $kerf_3 = 2\mathbb{Z}$

للتوضيح ايضاً

$$kerf_3 = \{x \in \mathbb{Z} \ : f_3(x) = 2\mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \ : \ x + 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \ : \ x \in 2\mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$$

أي أن

$$Imf_2 = kerf_3$$

- وأخيراً لنحسب

$$Imf_3 = kerf_4$$

لنحسب Imf_3 بما أن f_3 هو تشاكل الغمر القانوني فإن الصورة المباشرة هي المستقر كله

$$Imf_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

لنأخذ التطبيق f_4 ولنحسب $kerf_4$

$$f_4:\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

$$x + 2\mathbb{Z} \to 0$$

واضح أن صورة أي عنصر هي الصفر ومنه النواة هي المنطلق بأكمله أي أن

$$kerf_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

ومنه

$$Imf_3 = kerf_4$$

أي أن المتتالية تامة عند كل حد ومنه فهي تامة

تعريف : المتتالية القصيرة : لتكن (M,N,P) ثلاث مودولات على A ولنأخذ المتتالية التالية من التشاكلات المودولية: $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ حيث f,g تشاكلات مودولية .

مبرهنة : لتكن لدينا المتتالية القصيرة من الشكل :

$$(**)\quad 0 \xrightarrow{(1)} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \xrightarrow{(2)} 0$$

عندها تكون المتتالية ** تامة $\Leftrightarrow$ يتحقق:

١) f متباين
٢) $Imf = kerg$
٣) g غامر

البرهان :

نعلم حتى تكون المتتالية ** تامة يجد أن تكون تامة عند كل حد من حدودها و هذا يكافئ :

$$\text{متتالية تامة } ** \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ تامة عند } (1) \\ N \text{ تامة عند } (2) \\ P \text{ تامة عند } (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \{0\} = Im(1) = kerf \\ Imf = kerg \\ Img = ker2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{0\} = kerf \Leftrightarrow f \text{ متباين} \\ Imf = kerg \\ Img = P \Leftrightarrow g \text{ غامر} \end{cases}$$

وبذلك يتم المطلوب

ملاحظة : هذه المبرهنة لا تطبق الا على المتتاليات القصيرة فقط والتي تبدأ وتنتهي بصفر وتكون مؤلفة من 5 حدود .

- في المثال السابق نجد أن المتتالية هي متتالية قصيرة وهي تامة لانها تحقق الشروط السابقة في المبرهنة .

نتيجة : لتكن لدينا المتتالية التالية :

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

$$Imf \subseteq kerg \iff g \circ f = 0$$

البرهان :

$\Leftarrow$ لدينا $g \circ f = 0$ ولنثبت أن $Imf \subseteq kerg$

$$x \in Imf \ : \exists m \in M \ ; \ f(m) = x$$

$$g(x) = g(f(m)) = g \circ f(m) = 0$$

$$\Longrightarrow x \in kerg \Longrightarrow Imf \subseteq kerg$$

$\Longrightarrow$ لدينا $Imf \subseteq kerg$ ولنثبت أن $g \circ f = 0$

$$m \in M \ : g \circ f(m) = g(f(m)) = 0 \ ; f(m) \in Imf \subseteq kerg$$

إذا : $g \circ f = 0$

أمثلة :

١) اذا كان لدينا :

$$0 \to 3\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to 0$$

$$x \to x$$

$$x \to x + 3\mathbb{Z}$$

يمكن حل المثال حسب مبرهنة المتتاليات القصيرة :

- واضح أن(f متباين) (وايضاً g غامر لانه تشاكل الغمر القانوني) (ولنثبت أن $Imf = kerg$)

$$Imf = \{f(x) \ : \ x \in 3\mathbb{Z}\} = \{x \ : \ x \in 3\mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$$

إن g هو تشاكل الغمر القانوني ومنه $kerg = 3\mathbb{Z}$

أي أن $Imf = kerg$ ويتم المطلوب .

٢) ليكن: $f: H \to G$ تشاكل زمري(عندما نقول تشاكل زمري يقصد به أن H, G زمرتين تبديليتين أو نقول H و G هي $\mathbb{Z}-$ مودول) عندها يكون لدينا متتالتين تامتين هما :

$$(1) \qquad 0 \to ker\, f \to H \xrightarrow{h} H/ker\, f \to 0$$

$$\alpha \to \alpha$$

$$h: x \to x + ker\, f$$

حيث: h تشاكل الغمر القانوني.

$$(2) \qquad 0 \to Im\, f \to G \xrightarrow{g} G/Im\, f \to 0$$

$$\alpha \to \alpha$$

$$g \to g + Im\, f$$

<u>**أثبت أن المتتاليتين تامتين.**</u>

٣) ليكن: $f\colon M \to N$ تشاكل مودولي عندها

$$0 \to ker\, f \to M \xrightarrow{f} N \to N/Imf \to 0$$

$$x \to x$$

$$x \to f(x)$$

أثبت ان هذه المتتالية تامة .

<u>**المثالين الثاني والثالث (وظيفة).**</u>

ملاحظة : ندعو $cokerf = N/Imf$ بمرافق النواة .

<u>**المبرهنة الحية :**</u> ليكن المخطط التبديلي من التشاكلات المودولية .

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & kera' \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d] & kera \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d] & kera'' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dddll, bend left, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a'"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "a"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "a''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & N \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& cokera' \arrow[r, "\bar{f}'"] & cokera \arrow[r, "\bar{g}'"] & cokera'' &
\end{tikzcd}$$

إن المخطط تبديلي واسطره متتاليات تامة عندها يوجد متتالية تامة و هي

المتسقيم المنحني

$$0 \to kera' \xrightarrow{\bar{f}} kera \xrightarrow{\bar{g}} kera'' \xrightarrow{\bar{d}}$$

$$cokera' \xrightarrow{\bar{f'}} cokera \xrightarrow{\bar{g'}} cokera''$$

حيث $\bar{f}, \bar{g}$ مقصور f و g على المنطلق أما $\bar{f'}, \bar{g'}$ تشاكلات مستخلصة من f', g' .

البرهان : بدأت الدكتورة بإنطلاقة البرهان ولكن سنورد البرهان كاملاً في المحاضرة القادمة.

(ملاحظة في ثاني وثالث سطر هي اسطر تامة ولكن وضعت السطر الأول والرابع من اجل التوضيح ويجب علينا اثبتا انها تامة).

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو التوت – شهد الحايك البوشي