نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الثانية

◄ عنوان المحاضرة : علاقات التكافؤ والترتيب.

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

- بدأ الدكتور بمراجعة المحاضرة الأولى ثم اعطى:
- مبرهنتان تعتمد على ماسبق.
- علاقات الترتيب ك مبرهنات وتعاريف.
- تعاريف مهمة للعناصر وامثلة عليها .

والآن لنبدأ (:

مبرهنة: لتكن P مجموعة غير خالية ولنفرض ان Σ تجزئة للمجموعة P عندئذ العلاقة $\mathcal{P}$ المعرفة على P بالشكل:

$$\forall a,b \in P:\ a\mathcal{P}b \Leftrightarrow \exists A \in \Sigma;\ a,b \in A$$

هي علاقة تكافؤ على المجموعة P وإن صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{P}$ هي وفقط هي عناصر التجزئة Σ أي أن :

$$\Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

البرهان :

لنبرهن أن $\mathcal{P}$ هي علاقة تكافؤ فإن :

١) $\mathcal{P}$ انعكاسية لأن : بما ان Σ تجزئة للمجموعة P فهذا وحسب الشرط الثالث من شروط التجزئة $P = \bigcup_{A\,\in\Sigma} A$ كل عنصر من p ينتمي لواحدة على الأقل من المجموعات الجزئية

لنأخذ عنصر كيفي من P فيكون $a \in P$ وبذلك $a \in \bigcup_{A\,\in\Sigma} A$

$$\exists A \in \Sigma;\ a \in A \Longrightarrow a\mathcal{P}a$$

٢) $\mathcal{P}$ تناظرية لأن : لنأخذ عنصريين كيفيين

$$\forall a,b \in P:\ a\mathcal{P}b \Leftrightarrow \exists B \in \Sigma\ ;\ a,b \in B\ ,\ b,a \in B \Longrightarrow b\mathcal{P}a$$

٣) $\mathcal{P}$ متعدية لأن : لنأخذ ثلاث عناصر كيفية : $\forall a,b,c \in P$

$$a\mathcal{P}b\ \exists\ A \in \Sigma\ ;\ a,b \in A$$

$$b\mathcal{P}c\ \exists\ B \in \Sigma\ ;\ b,c \in B$$

$$\Longrightarrow b \in A \cap B \Longrightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

وكون Σ تجزئة للمجموعة P فإن : $A = B$ ومنه $a\,,c \in A \Longleftarrow a\mathcal{P}c$ ومنه $\mathcal{P}$ متعدية .

لنثبت الان المساواة:

$$\Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

ليكن $A \in \Sigma$ عندئذ $A \neq \emptyset$ ومنه يوجد $a \in A$ و لنبرهن ان $A = \bar{a}$

ليكن $x \in A$ عندئذ $a, x \in A$ ومنه $a\mathcal{P}x$ (حسب العلاقة المعرفة بنص المبرهنة)

وبالتالي $x \in \bar{a}$ ومنه $A \subseteq \bar{a}$

وليكن $y \in \bar{a}$ عندئذ $a\mathcal{P}y$ (و حسب العلاقة المعرفة بنص المبرهنة) يكون $\exists B \in \Sigma \ ; \ a, y \in B$

$a \in A \cap B$ وبالتالي $A = B$ (حسب الشرط الثاني من شروط التجزئة)

$$\Rightarrow y \in A$$

$$\Rightarrow \bar{a} \subseteq A$$

$$A = \bar{a} \in {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

وبالتالي نحصل على ان

$$\Sigma \subseteq {}^{P}/_{\mathcal{P}}$$

لنثبت الاحتواء المعاكس

ليكن $\bar{b} \in {}^{P}/_{\mathcal{P}}$ حيث $b \in P = \bigcup_{D \in \Sigma} D$

ومنه يوجد $D_0 \in \Sigma$ بحيث $b \in D_0$ ولنبرهن على $\bar{b} = D_0$

ليكن $x \in D_0$ عندئذ $b, x \in D_0$ (حسب العلاقة المعرفة بنص المبرهنة) $\Leftarrow b\mathcal{P}x$ ومنه $x \in \bar{b}$ ومنه

$$D_0 \subseteq \bar{b}$$

وليكن $y \in \bar{b}$ عندئذ $b\mathcal{P}y$ ومنه (حسب العلاقة المعرفة بنص المبرهنة)

$$\exists\, k \in \Sigma; b, y \in k$$

اصبح لدينا $b \in D_0 \cap k$ ومنه $D_0 = k$ (حسب الشرط الثاني من شروط التجزئة)

ونجد ان $y \in D_0$ أي ان $\bar{b} \subseteq D_0$ ومنه $\bar{b} = D_0 \in \Sigma$

و هكذا فإن كل مجموعة تنتمي الى Σ اصبح موجوداً في ${}^{P}/_{\mathcal{P}}$ أي أن

$$ {}^{P}/_{\mathcal{P}} \subseteq \Sigma$$

$$\Rightarrow {}^{P}/_{\mathcal{P}} = \Sigma$$

ملاحظة: لتكن Σ تجزئة للمجموعة P ، سوف نرمز لعلاقة التكافؤ الناتجة عن التجزئة Σ بالشكل $\mathcal{P}_\Sigma$.

مبرهنة: لتكن θ و Σ تجزئتين للمجموعة P فإن $\mathcal{P}_\theta$ و $\mathcal{P}_\Sigma$ علاقتي التكافؤ الناتجتين عن التجزئتين θ و Σ عندئذ :

$$\mathcal{P}_\Sigma = \mathcal{P}_\theta \Leftrightarrow \Sigma = \theta$$

البرهان :

" $\Leftarrow$ " لنفرض أن $\Sigma = \theta$ ولنبرهن أن $\mathcal{P}_\Sigma = \mathcal{P}_\theta$ وليكن $(a,b)\in \mathcal{P}_\Sigma$ حيث $a,b \in \mathrm{P}$ عندئذ :

حسب تعريف $\mathcal{P}_\Sigma$ نجد أن :

$$\exists\, \mathrm{A} \in \Sigma \,;\, \mathrm{a}, b \in A$$

ولدينا $\Sigma = \theta$ فرضا فإن $\mathrm{A} \in \theta$

$$a, b \in A \implies a\, \mathcal{P}_\theta\, b$$

أي أن : $a\, \mathcal{P}_\theta b$ ومنه $\mathcal{P}_\Sigma \subseteq \mathcal{P}_\theta$.

لنبرهن أن $\mathcal{P}_\theta \subseteq \mathcal{P}_\Sigma$ أي __**لنبرهن الاحتواء المعاكس**__ : وليكن $(d,f)\in \mathcal{P}_\theta$ حيث $d,f \in \mathrm{P}$ عندئذ :

حسب تعريف $\mathcal{P}_\Sigma$ نجد أن :

$$\exists\, B \in \theta; d, f \in B$$

ولدينا $\Sigma = \theta$ فرضاً ومنه $\mathrm{B} \in \Sigma$.

أي أن : $d,f \in \Sigma$ فإن $d\, \mathcal{P}_\Sigma\, f$ ومنه $(d,f)\in \mathcal{P}_\Sigma$ ومنه يكون :

$$\mathcal{P}_\theta \subseteq \mathcal{P}_\Sigma$$

ومن الاحتوائيين : $\mathcal{P}_\Sigma \subseteq \mathcal{P}_\theta$ و $\mathcal{P}_\theta \subseteq \mathcal{P}_\Sigma$ يكون $\mathcal{P}_\Sigma = \mathcal{P}_\theta$.

" $\Rightarrow$ " نفرض أن العلاقتين $\mathcal{P}_\Sigma = \mathcal{P}_\theta$ عندئذ يكون $P/_{\mathcal{P}_\Sigma} = P/_{\mathcal{P}_\theta}$

__**بناءً على مبرهنة سابقة :**__ فإن كل تجزئة تعرف علاقة تكافؤ وأن صفوف تكافؤ هذه العلاقة هي وفقط هي عناصر التجزئة فهذا يؤدي أن :

$$\Sigma = P/_{\mathcal{P}_\Sigma} = P/_{\mathcal{P}_\theta} = \theta$$

وبذلك تم المطلوب.

تمهيدية: ((الوظيفة))

لتكن P مجموعة غير خالية ولنفرض أن l مجموعة كل التجزئات المعرفة على P
و l_0 مجموعة كل علاقات التكافؤ المعرفة على P عندئذ : يوجد تطبيق متباين وغامر (تقابل) بين
l و l_0 وليكن $f : l \to l_0$

البرهان :

لنعرف العلاقة بالشكل : $f : l \to l_0$

$$\forall \Sigma \in l : f(\Sigma) = \mathcal{P}_\Sigma$$

ولما كان $\mathcal{P}_\Sigma$ علاقة تكافؤ على P فإن $\mathcal{P}_\Sigma \in l_0$

f تطبيق لأن :

$$\forall \Sigma , \theta \in l : \theta = \Sigma \implies \mathcal{P}_\theta = \mathcal{P}_\Sigma$$
$$\implies f(\Sigma) = f(\theta)$$

f تطبيق متباين لأن :

$$f(\Sigma) = f(\theta) \implies \mathcal{P}_\theta = \mathcal{P}_\Sigma$$
$$\implies \Sigma = {}^{P}/_{\mathcal{P}_\Sigma} = {}^{P}/_{\mathcal{P}_\theta} = \theta$$

f تطبيق غامر لأنه :

$\mathcal{P} \in l_0$ فإن $\mathcal{P}$ علاقة تكافؤ على P .

عندئذ فإن مجموعة الخارج ${}^{P}/_{\mathcal{P}}$ تشكل تجزئة للمجموعة P وبالتالي l $\in$ ${}^{P}/_{\mathcal{P}}$ أي أنّ :

$$\implies f\left({}^{P}/_{\mathcal{P}}\right) = \mathcal{P}_{P/_{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}$$

ومنه f تقابل و هو المطلوب .

علاقات الترتيب

تعريف : لتكن P مجموعة غير خالية و $\mathcal{P}$ علاقة معرفة على P نقول عن العلاقة $\mathcal{P}$ أنها علاقة ترتيب جزئي على المجموعة P إذا كانت العلاقة $\mathcal{P}$ ((انعكاسية – تخالفيه –متعدية))ويرمز عادة لعلاقة الترتيب بالرمز $\leq$.
اذا كانت $\leq$ علاقة ترتيب على المجموعة P نسمي الثنائية $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً .

$$\forall\, a,b \in P : a \leq b \iff \begin{cases} a = b \\ a < b \end{cases}$$

ملاحظة: ليست كل المجموعات معّرف عليها علاقة تكافؤ , وليس كل المجموعات معّرف عليها علاقة ترتيب.

و لا نستطيع التعامل مع مجموعة اذا لم تكن معرفة على علاقة إما تكافؤ او ترتيب.

مثال: مجموعة الاعداد الطبيعية هي مجموعة مرتبة جزئياً

$$0 < 1 < 2 < 3 \dots$$

مجموعة الاعداد الصحيحة هي مجموعة مرتبة جزئيا

$$\dots . < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \cdots$$

- توجد اكثر من علاقة ترتيب على المجموعة الواحدة مثلا

ان مجموعة الاعداد الصحيحة مرتبة وفق علاقة ترتيب أخرى بالشكل :

$$0 < 1 < 2 \cdots < -1 < -2 < \cdots$$

مبرهنة : لتكن P مجموعة غير خالية ولتكن $\leq$ علاقة انعكاسية ومتعدية معرفة على P عندئذ :

١) العلاقة $\mathcal{P}$ المعرفة على P بالشكل الاتي :

$$\forall a, b \in P : \ a\mathcal{P}b \ \Leftrightarrow a \leq b \wedge \ b \leq a$$

هي علاقة تكافؤ على P .

٢) العلاقة $(\leq)$ المعرفة على مجموعة الخارج $P/_{\mathcal{P}}$ بالشكل الاتي :

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in P/_{\mathcal{P}} \ ; \bar{a} \leq \bar{b} \Leftrightarrow a \leq b$$

هي علاقة ترتيب جزئي على $P/_{\mathcal{P}}$.

البرهان :

١) لنثبت انها انعكاسية :

$$\forall a \in P : a \leq a \ \Leftrightarrow \ a\mathcal{P}a$$

وانها تناظرية لان

$$\forall a, b \in P : \ a\mathcal{P}b \ \Leftrightarrow a \leq b \wedge \ b \leq a \Leftrightarrow b \leq a \wedge \ a \leq b \Leftrightarrow b\mathcal{P}a$$

وانها متعدية لان

$$\forall a, b \in P : \ a\mathcal{P}b \ \Leftrightarrow a \leq b \wedge \ b \leq a$$

$$\forall c, b \in P : \ b\mathcal{P}c \ \Leftrightarrow b \leq c \wedge \ c \leq b$$

ولكن $\leq$ متعدية منه $a \leq c \wedge \ c \leq a \Leftrightarrow a\mathcal{P}c$

أي أن العلاقة $\mathcal{P}$ متعدية

٢) ليكن $\bar{a} \in {}^{P}/_{\mathcal{P}}$ عندئذ $a \in P$ وان $a \leq a$ ومنه $\bar{a} \leq \bar{a}$ وبالتالي العلاقة $\leq$ انعكاسية .

ليكن $\bar{a}, \bar{b} \in {}^{P}/_{\mathcal{P}}$ بحيث $\bar{b} \leq \bar{a}$ و $\bar{a} \leq \bar{b}$ عندئذ $a, b \in P$ وان $a \leq b, \; b \leq a$

وحسب (١) فإن $a\mathcal{P}b$ ومنه $a \in \bar{b}$ **<u>(احدهما ينتمي لصف تكافؤ الاخر)</u>**

ومنه $\bar{a} = \bar{b} \Leftarrow$ العلاقة $\leq$ تخالفية

ليكن $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in {}^{P}/_{\mathcal{P}}$ عندئذٍ: $\forall a, b, c \in P$

ولنفرض ان $\bar{b} \leq \bar{c}$ و $\bar{a} \leq \bar{b}$ حسب التعريف: $a \leq b, \; b \leq c$

$$\Rightarrow a \leq c \Rightarrow \bar{a} \leq \bar{c}$$

ومنه العلاقة متعدية وبالتالي فهي علاقة ترتيب ويتم المطلوب .

لنتعرف على بعض العناصر في المجموعات المرتبة:

تعاريف : ليكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً:

١) نقول عن العنصر $a \in P$ إنه عنصر **<u>أصغر</u>** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall x \in P \, ; \, a \leq x$$

٢) نقول عن العنصر $b \in P$ إنه عنصر **<u>أصغري</u>** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall y \in P \, ; y \leq b \Longrightarrow y = b$$

٣) نقول عن العنصر $a \in P$ أنه عنصر **<u>أكبر</u>** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall x \in P : x \leq a$$

٤) نقول عن العنصر $b \in P$ أنه عنصر **<u>أعظمي</u>** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall y \in P , b \leq y \Longrightarrow b = y$$

و ليس من الضروري أن تتواجد كل هذه العناصر في مجموعة مرتبة ما .

<u>مثال:</u>

- في مجموعة الاعداد الطبيعية (الصفر) هو عنصر **اصغر واصغري** بالنسبة لعلاقة الترتيب المألوفة

$$0 < 1 < 2 < \cdots$$

- في مجموعة الاعداد الصحيحة بالنسبة لعلاقة الترتيب المألوفة

$$\cdots -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \cdots$$

لا تحوي أيا من العناصر السابقة.

بينما اذا عرّفنا علاقة ترتيب جديدة على مجموعة الاعداد الصحيحة

$$0 < 1 < 2 \cdots -1 < -2 < -3 \cdots$$

فإن العنصر (صفر 0) هو عنصر أصغر وأصغري.

مثال: لتكن P مجموعة غير خالية ولتكن Σ اسرة من المجموعات الجزئية في P

هل يمكن ان نعرّف على هذه الاسرة علاقة ترتيب؟

الحل:

إن الثنائية $(\Sigma, \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً (علاقة الاحتواء هي علاقة ترتيب جزئي)

$$\forall A \in B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A \not\subseteq B \end{cases}$$

$A = A$

$A \subseteq B \ \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$

$A \subseteq B \ \subseteq D \Rightarrow A \subseteq D$

ومنه فالعلاقة انعكاسية وتخالفية ومتعدية فهي علاقة ترتيب جزئي .

مثال: لتكن $A = \{a, b, c, d\}$ مجموعة ما

ولنأخذ المجموعة $B = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ اسرة من المجموعات الجزئية.

ولنأخذ المجموعة $D = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ اسرة من المجموعات الجزئية.

ولنأخذ المجموعة: $K = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\{a, c\}\}$ اسرا من المجموعات الجزئية.

الحل :

$(B, \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

- $\{a\}$ عنصر اصغر في B (لانه محتوى في كل المجموعات الجزئية في B).

$$\{a\} \subseteq \{a\}$$
$$\{a\} \subseteq \{a, b\}$$

- $\{a, b\}$ عنصر أكبر في B لان (كل المجموعات الجزئية محتواة في العنصر $\{a, b\}$).

$$\{a\} \subset \{a, b\}$$

$$\{b\} \subset \{a, b\}$$

- $\{a\}$ أصغري في B
- $\{a, b\}$ أعظمي في B

$(D,\subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

- $\{a\}$ ليس اصغر في D لأنه يوجد $\{b\}\epsilon D$ و $\{a\} \not\subset \{b\}$
- $\{b\}$ ليس اصغر في D لأنه يوجد $\{a\}\epsilon D$ و $\{b\} \not\subset \{a\}$
- $\{a\}$ و $\{b\}$ كل منهما عنصر أصغري .
- $\{a,b\}$ عنصر اكبر وأعظمي في D .

$(K,\subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

- $\{a\}$ و $\{b\}$ كل منهما ليس عنصر أصغر في K
- $\{a,b\}$ ليس عنصر اكبر في K .
- $\{a,c\}$ ليس اكبر في K .
- $\{a,b\}$ و $\{a,c\}$ كل منهما عنصر أعظمي في K .

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج