نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الخامسة عنوان المحاضرة: العدد العقدي بالشكل المثلثي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ خواص العدد العقدي بالشكل المثلثي $cis\theta$

٢ ـ دستور دوموافر

٣ ـ جذور عدد عقدي

تذكرة : أن الشكل الجبري للعدد العقدي $\mathfrak{z} = x + iy$

كذلك الشكل المثلثي لـ $\mathfrak{z}$ هو : $\mathfrak{z} = r[cos\theta + i\ sin\theta]$

وأختصار نستطيع كتابته بالشكل : $\mathfrak{z} = [r\,,\theta]$

حيث : $r = |\mathfrak{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}\ , sin\theta = \frac{y}{r}\ , cos\theta = \frac{x}{r}\ , tan\theta = \frac{x}{y}$ مع الأخذ بعين الاعتبار في أي ربع تقع $\mathfrak{z}$

*يرمز للعدد العقدي $cos\theta + i\ sin\theta$ بالرمز $cis\theta$ (الذي كنا نرمزه سابقا بالرمز $e^{i\theta}$)

خواص العدد العقدي بالشكل المثلثي $cis\theta$

$$1]\ |cis\theta| = \sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta} = 1\ ;\ \forall\theta \in \mathbb{R}$$

$$2]\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$*\ cis(2\pi k) = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k) = 1 + 0 = 1$$

$$*\ cis(\pi + 2\pi k) = \cos(\pi + 2\pi k) + i\sin(\pi + 2\pi k) = -1 + 0 = -1$$

$$*\ cis\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 0 + i(1) = i$$

$$* \, cis\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)=0+i(-1)=-i$$

$$3]\ \overline{cis\theta}=\overline{cos\theta+i\,sin\theta}=cos\theta-i\,sin\theta$$

وبما أن الـ cos تابع زوجي فإن : $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$

كما أن الـ $sin\theta$ تابع فردي فإن : $-\sin(\theta)=\sin(-\theta)$

بالتالي $\overline{cis\theta}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=cis(-\theta)$

$$4]\ (cis\theta)^{-1}=\frac{1}{cis\theta}=\frac{\overline{cis\theta}}{cis\theta.\overline{cis\theta}}$$

ضربنا البسط والمقام بمرافق المقام $(cis\theta)^{-1}=\frac{cis(-\theta)}{|cis\theta|^2}$

وذلك حسب خاصية في المحاضرة الثالثة $3.\bar{3}=|3|^2$

$$(cis\theta)^{-1}=cis(-\theta)=\overline{cis\theta}$$

$$5]\ cis\theta_1.cis\theta_2=cis(\theta_1+\theta_2)\ ;\ \forall\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$$

وكذلك فإن : $(cis\theta)^n=cis(n\theta)\quad;\ \forall n\in N$

من أجل $n=-m \Leftarrow 0>n\in\mathbb{Z}$

$$(cis\theta)^n=(cis\theta)^{-m}=((cis\theta)^{-1})^m=\big(cis(-\theta)\big)^m=cis(-m\theta)=cis(n\theta)$$

عندما $;n=0$ $(cis\theta)^0=cis(0.\theta)=1$

بالتالي نستنتج :

وذلك أياً كانت $;n\in\mathbb{Z}$ $(cis\theta)^n=cis(n\theta)$

دستور دوموافر :

$$(cos\theta+i\,sin\theta)^n=\cos(n\theta)+\sin(n\theta)$$

تمرين وظيفة : اكتب $\cos(3\theta),\sin(3\theta)$ بدلالة $\cos\theta,sin\theta$ مستخدماً دستور دوموافر

الحل

حسب دستور دوموافر

$$(cis\theta)^3 = cis(3\theta) = \cos(3\theta) - i\sin(3\theta) \dots [1$$

$$(cis\theta)^3 = (cos\theta + i\ sin\theta)^3$$

$$= cos^3\theta + 3cos^2\theta(i\ sin\theta) + 3cos\theta(i\ sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$$

$$= (cos^3\theta - 3cos\theta.sin^2\theta) + i(3cos^2\theta.sin\theta - sin^3\theta) \dots [2$$

بالمطابقة [1 مع [2 نجد :

$$\cos(3\theta) = cos^3\theta - 3cos\theta.sin^2\theta$$

لكن $sin^2\theta = 1 - cos^2\theta$

$$\cos(3\theta) = cos^3\theta - 3\cos(1 - cos^2\theta)$$

$$\cos(3\theta) = cos^3\theta - 3cos\theta + 3cos^3\theta$$

$$\Longrightarrow \cos(3\theta) = 4cos^3\theta - 3cos\theta$$

كما أن : $\sin(3\theta) = 3cos^2\theta.sin\theta - sin^3\theta$

$$\sin(3\theta) = 3sin\theta(1 - sin^2\theta) - sin^3\theta$$

$$\sin(3\theta) = 3sin\theta - 3sin^3\theta - sin^3\theta$$

$$\Longrightarrow \sin(3\theta) = -4sin^3\theta + 3sin\theta$$

$$6]cis\theta_1 = cis\theta_2 \Longrightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2\pi k\ ; k \in \mathbb{Z}$$

جذر العدد العقدي

ليكن a عدداً عقدياً ونقول عن عدد 3 إنه جذر من المرتبة n حيث$(n \geq 2)$ للعدد إذا وفقط إذا :

$$3^n = a$$

لإيجاد الجذور من المرتبة n لعدد عقدي :

نميز حالتين :

١- $a = 0$ جميع الجذور من أي مرتبة مساوية للصفر $a^n = 0$

٢- $a \neq 0$ نفرض أن $\mathfrak{z} = r\,cis\theta$ جذراً من المرتبة n لـ a عندئذ (حسب التعريف) :

$$(r.cis\theta)^n = a \Leftrightarrow r^n cis(n\theta) = |a| cis(Arg\ a)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = |a| \\ n\theta = Arg(a) + 2\pi k\ ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{|a|} \\ \theta = \dfrac{Arg\ a + 2\pi k}{n}\ ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\mathfrak{z}_k = r\ cis\theta = \sqrt[n]{|a|}\ cis\left(\frac{Arg\ a + 2\pi k}{n}\right); k \in \mathbb{Z}\right]$$

أذا كان

$$* \ k = 0 \Longrightarrow \mathfrak{z}_0 = \sqrt[n]{|a|}\ cis\left(\frac{Arg\ a}{n}\right)$$

$$* \ k = 1 \Rightarrow \mathfrak{z}_1 = \sqrt[n]{|a|}\ cis\left(\frac{Arg\ a}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$* \ k = n-1 \Longrightarrow \mathfrak{z}_{n-1} = \sqrt[n]{|a|}\ cis\left(\frac{Arg\ a}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$* \ k = n \Longrightarrow \mathfrak{z}_n = \sqrt[n]{|a|}\ cis\left(\frac{Arg\ a}{n} + 2\pi\right) = \sqrt[n]{|a|}\ cis\left(\frac{Arg\ a}{n}\right) = \mathfrak{z}_0$$

أن العدد العقدي a عدداً من الجذور المتمايزة من المرتبة n جذر يمكن الحصول عليه بإعطاء قيم لـ k من 0 إلى $(n-1)$

$$\mathfrak{z}_{n+1} = \mathfrak{z}_1\ , \mathfrak{z}_{n+2} = \mathfrak{z}_2\ , \mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}_0$$

بالتالي الجذور من المرتبة n هي :

$$\mathfrak{z}_k = \sqrt[n]{|a|}\ cis\left(\frac{Arg\ a + 2\pi k}{n}\right)$$

ملاحظة : إن الجذر من المرتبة n لعدد عقدي غير معدوم تقع على محيط الدائرة التي مركزها المبدأ ونصف قطرها الجذر النوني لطويلة a وذلك لأن $|\mathfrak{z}_k| = \sqrt[n]{|a|}\ ; \forall k \in \mathbb{Z}$

تمرين

حل المعادلة : $z^3 = 1$

واكتب الحلول بالشكل الجبري ومثله في المستوي العقدي

صيغة أخرى للسؤال : أوجد الجذور التكعيبية للعدد 1 واكتب الجذور بالشكل الجبري ومثله في المستوي العقدي

◄**تنويه** : عندما نقول في مادة التحليل العقدي حل المعادلة فنقصد إيجاد حلول لها من $\mathbb{C}$ وليس من $\mathbb{R}$

فمثلا و اخذنا المعادلة $z^2 = -9$ لا نقول أنها مستحيلة الحل بل يوجد لها حل في $\mathbb{C}$ وهي $3i , -3i$

*ولا توجد في $\mathbb{C}$ معادلات مستحيلة الحل

(الحل)

نفرض أن $z = r\, cis\theta$

$$r^3\, cis(3\theta) = 1 \Leftrightarrow r^3 cis(3\theta) = cis\, 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \Rightarrow r = 1 \\ 3\theta = 0 + 2\pi k \,; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

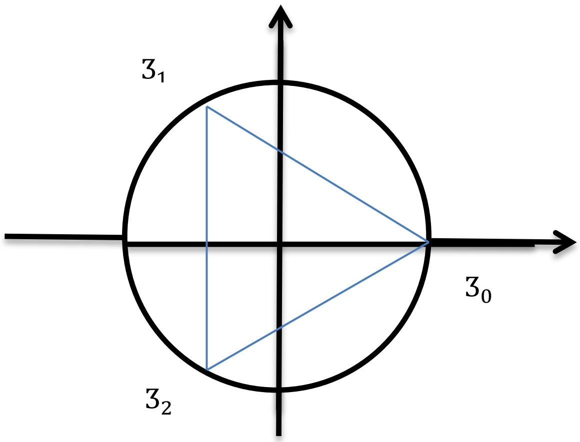
$$r = 1 , \theta = \frac{2\pi k}{3} \,; k \in \mathbb{Z}$$

$$* \, z_0 = cis\, 0 = 1$$

$$* \, z_1 = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) = cos\frac{2\pi}{3} + i\, sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$* \, z_2 = cis\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3})$$

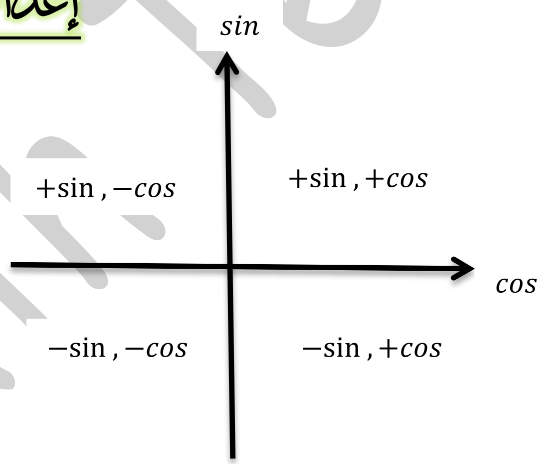
$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



انتهت المحاضرة

إعداد: مهيار طعمة-شهناز طاطيش-يمنى خرما

تذكرة:



	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معروف