2017/10/2

المحاضرة الأولى:

المعادلات التكاملية وحساب المتحولات.

تعريف المعادلة التكاملية:

تسمى كل معادلة بالشكل:

$$(1) \quad \psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \psi(t)\, dt$$

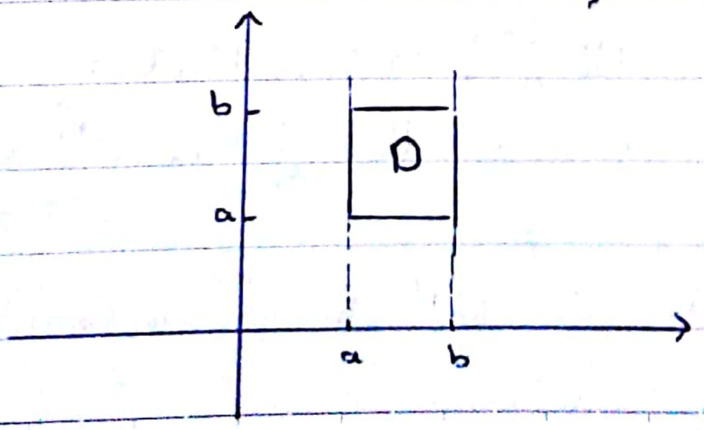
دلالات الرموز:

$h(x)$ دالة معلومة تابع معرف ومستمر

a, b ثوابت (حدود التكامل)

$\psi(x)$ دالة مجهولة يطلب إيجادها

$k(x,t)$ دالة تتبع لمتغيرين تسمى نواة المعادلة التكاملية وهي دالة معرفة على هذا المربع D ضمن المستوي الإحداثي x, t حيث مساحة التعريف D هي: $D = [a, b] \times [a, b]$



نسمي هذه المعادلة التكاملية بالمعادلة الخطية إذا كانت العمليات التي تخضع لها الدالة المجهولة هي عمليات خطية مثلاً

المعادلة (1) هي معادلة تكاملية خطية بينما المعادلة (2).

$$(2) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} k(x,t)\,[\varphi(t)]^2\, dt = 0$$

معادلة غير خطية

والمعادلة (1) تكتب بالشكل التالي

$$(1) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_0^b k(x,t)\, \varphi(t)\, dt = h(x)$$

$$\ell[\varphi(x)] = h(x)$$

$$* \quad \ell[c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)] = c_1 \ell[\varphi_1(x)] + c_2 \ell[\varphi_2(x)]$$

من أجل c_2, c_1 ثوابت.

وإن λ في (1) هي ثابت قد يكون حقيقي أو عقدي . x, t متغيران حقيقيان

أما الدوال $h(x)$ ، k ، φ هي دوال قد تكون حقيقية أو عقدية

هذا ما يتعلق بمفهوم المعادلة التكاملية .

بعض التعاريف الأساسية :

نقول عن الدالة φ إنها كمولة تربيعياً على المجال $[a,b]$ المغلق اذا حققت:

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2\, dt < \infty$$ محدودة

* نقول عن النواة $k(x,t)$ إنها كمولة تربيعياً على المربع D اذا حققت الشروط التالية:

1) $\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2\, dx\, dt < \infty$

2) $\int_a^b |k(x,t)|^2\, dx < \infty \quad \forall t \in [a,b]$

3) $\int_a^b |k(x,t)|^2\, dt < \infty \quad \forall x \in [a,b]$

الأنواع الرئيسية للمعادلات التكاملية:

- النوع الأول:

- معادلة فريدهولم التكاملية الخطية غير المتجانسة:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\, \varphi(t)\, dt = h(x)$$

والمتجانسة $h(x) = 0$

or $\ell[\varphi(x)] = h(x)$

$\ell[\varphi(x)] = 0$

- معادلة فولتيرا التكاملية:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\, \varphi(t)\, dt = h(x)$$

طريقة حل المعادلات التكاملية:

$\boxed{1}$ طريقة التقريبات المتتالية لحل معادلات فريدهولم التكاملية.

شروطها - أن تكون $h(x)$ كمولة تربيعياً و $k(x,t)$ كمولة تربيعياً على المربع D

لدفع في (1) منطلقين من $\varphi(x) = 0$

فنحصل على $\varphi_0(x) = h(x)$

وهو التقريب الأول ذو المرتبة صفر.

نعوض هذا التقريب في معادلة فريدهولم فنحصل على

$$\varphi_1(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \varphi_0(t)\, dt$$

وهو التقريب الثاني

$$\varphi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \left[h(t) + \lambda \int_a^b k(t,z)\, \varphi_0(z)\, dz\right]$$

حيث $\varphi_0(z) = h(z)$ معلومة نعوض عن $\varphi_1(t)$ ، $x \to t$ ، $t \to z$

باستخدام $\varphi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \varphi_1(t)\, dt$

بالتعميم $\varphi_{n+1}(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \varphi_n(t)\, dt$

علياً حصلنا على متتالية من الحلول $\{\psi_{n+1}(x)\}$ إذا كانت هذه المتتالية متقاربة بانتظام على $[a,b]$ فإن هذه المتتالية متقاربة من $\psi(x)$ عندما $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{n+1}(x) = \psi(x)$$

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \psi(t)\, dt$$

هذه النهاية تمثل حل لمعادلة فريدهولم التكاملية.

*

$$\psi_0(x) = h(x)$$

$$\psi_1(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \psi_0(t)\, dt$$

الآن ننتقل للعبارة الآتية:

$$\psi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \cdot h(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b k(x,t) \left[\int_a^b k(t,z)\, h(z)\, dz\right] dt$$

$$h(z) = \psi_0(z)$$

لندخل المصطلحات الآتية (**)

$$k_1(x,t) = k_0(x,t)$$

$$k_2(x,t) = \int_a^b k_1(x,z)\, k_1(z,t)\, dz$$

$$k_3(x,t) = \int_a^b k_1(x,z)\, k_2(z,t)\, dz$$

$$\vdots$$

$$k_n(x,t) = \int_a^b k_1(x,z)\, k_{n-1}(z,t)\, dz$$

بالعودة إلى $\psi_2(x)$

$$\psi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \cdot h(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b k(x,t) \left[\int_a^b k(t,z)\, h(z)\, dz\right] dt$$

بالحد الأخير نبدل كل $t \to z$ $\quad z \to t$

لكي يتوافق مع الأشكال السابقة (**)

بداية $x \to t$ نهاية

وسط z

$$\varphi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, h(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b k(x,z)\, k(z,t)\, h(t)\, dt\, dz$$

$$= \text{------} + \lambda^2 \int_a^b h(t)\, dt \int_a^b \underbrace{k(x,z)\, k(z,t)}_{k_2}\, dz$$

$$= \text{------} + \lambda^2 \int_a^b k_2(x,t)\, h(t)\, dt$$

$$\varphi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \cdot h(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b \underbrace{k_2(x,t)}_{\text{معلوم}} \cdot h(t)\, dt$$

بالتعميم

$$\varphi_n(x) = h(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_a^b k_m(x,t) \cdot h(t)\, dt$$

حيث $k_m(x,t)$ يسمى نواة المكررة لـ m

إذا افترضنا إن المتسلسلة في العلاقة الأخيرة متقاربة بانتظام وكما هو معلوم بأن التقارب منتظم هو شرط كافي للانتقال الى النهايات أي أن:

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$$

$$\varphi_2(x) = h(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b k_m(x,t)\, h(t)\, dt$$

ويسمى هذه المتسلسلة الموجودة في الطرف الأيمن بالمتسلسلة نيومن