◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄المحاضرة : السابعة عنوان المحاضرة : تبولوجيا الأعداد العقدية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـحل تمارين محاضرة السادسة

٢ـالتمثيل الكروي للأعداد العقدية (الاسقاط المجساوي)

٣ـتبولوجيا الأعداد العقدية

في بداية هذه المحاضرة سنورد لكم حل وظائف المحاضرة السادسة ، منها ما قد تم حله في المحاضرة السابقة و نورد لكم الحل بطريقة أخرى حرصاً على أن تصل لكم كل طرق الحل الممكنة لمختلف التمارين
(فقط تمرين واحد المختلف بطريقة الحل)

١ـ حل المعادلة التالية في $\mathbb{C}$ $\quad 3^4 + 3^2 + 1 = 0$ (تم الحل في المحاضرة السابقة و لكن سنوضح اخراج الحل الثاني بشكل مفصل)

الحل

نفرض أن $W = 3^2$ وذلك لتخفيض الأس:

$$\Rightarrow W^2 + W + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0$$

إن Δ سالبة إذا مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$ لكن في $\mathbb{C}$ لها حل $\quad \delta = \sqrt{\Delta} = \sqrt{3}i$

إما $\quad W_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ أو $\quad W_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

ولكن فرضا لدينا $3^2 = W$

$$\begin{cases} 3^2 = w_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \ldots (1) \\ 3^2 = W_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \ldots (2) \end{cases}$$

$$(1)\ldots \mathfrak{z}^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

لنوجد الجذرين لـW_2 لنكتب العدد العقدي بشكل المثلثي

نفرض أن $\mathfrak{z}=r.cis\theta$ هو جذر : $\qquad r^2cis2\theta=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$$\Rightarrow r^2=\left|\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$$

لإيجاد الزاوية : **إما** $\begin{cases}cos\theta=-\frac{1}{2}\\ sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$ أي الزاوية في الربع الثالث

أو $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

$$\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow r^2cis2\theta=(1)\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}r^2=1\rightarrow r=1\\ 2\theta=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\,;k\in Z\ \Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{3}+\pi k\,;k\in\{0,1\}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\mathfrak{z}_k=\left[1,-\frac{\pi}{3}+\pi k\right]\Rightarrow\begin{cases}\text{إما}\quad k=0\longrightarrow\mathfrak{z}_0=\left[1,-\frac{\pi}{3}\right]\\ \text{أو}\quad k=1\rightarrow\mathfrak{z}_1=\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]\end{cases}$$

لو كان مطلوب بالسؤال أوجد الجذور بالشكل الجبري لا نتوقف هنا بل نكمل ، حيث نكتب :

$$\mathfrak{z}_0=\left[1,-\frac{\pi}{3}\right]=1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\left(\sin-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(2)\ldots \mathfrak{z}^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

نفرض $\mathfrak{Z}' = r'.cis\theta'$

$$r'^2.cis2\theta' = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$r'^2.cis2\theta' = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

لإيجاد الزاوية :

$$\begin{cases} cos2\theta' = -\frac{1}{2} \\ sin2\theta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow 2\theta' = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$ في الربع الثاني

$$\Rightarrow r'^2.cis2\theta' = (1).cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 = 1 \to r = 1 \\ 2\theta' = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \to \theta' = \frac{\pi}{3} + \pi k \,;k \in Z \end{cases}$$

$$\mathfrak{Z}_K = \left[1, \frac{\pi}{3} + \pi k\right] \;; k = [0,1]$$

إما $k = 0 \to k_0 = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$

أو $k = 1 \to k_1 = \left[1, \frac{4\pi}{3}\right]$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $[\mathfrak{Z}_0 \,, \mathfrak{Z}_1 \,, \mathfrak{Z}'_0 \,, \mathfrak{Z}'_1]$

٢ـ أثبت أنه إذا كان $\mathfrak{Z}_0$ جذراً للمعادلة $a\mathfrak{Z}^2 + b\mathfrak{Z} + c = 0$

حيث $c, b, a \neq 0$ ثوابت حقيقية فإن $\overline{\mathfrak{Z}_0}$ جذراً أيضاً لهذه المعادلة (طريقة مختلفة عن الواردة في المحاضرة السابقة)

الحل

لدينا :

$$az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow a\left[z^2+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=0$$

حيث قمنا بالإتمام إلى مربع كامل بأن نضيف ونطرح مربع نصف أمثال z

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0$$

بفرض δ جذرا تربيعي لـ$\Delta=b^2-4ac$

$$\delta^2=\Delta \Longrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2=0$$

لدينا المتطابقة التالية صحيحة في $\mathbb{C}$: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)=0$$

نعلم أن $\mathbb{C}$ حقل فهو يخلو من قواسم الصفر وبالتالي

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\delta}{2a}=0 \to z_1=-\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\delta}{2a} \\ z+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\delta}{2a}=0 \to z_2=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\delta}{2a} \end{cases}$$

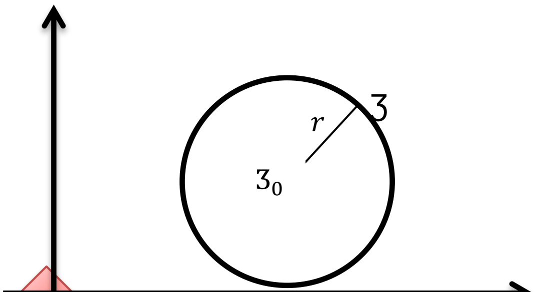
٣ـ ماذا تمثل كل من المجموعات الأتية من المستوي العقدي :

حيث r, r_1, r_2 أعداد حقيقية موجبة $(r_1<r_2)$ و z_0 , z_2 , z_1 ثوابت عقدية

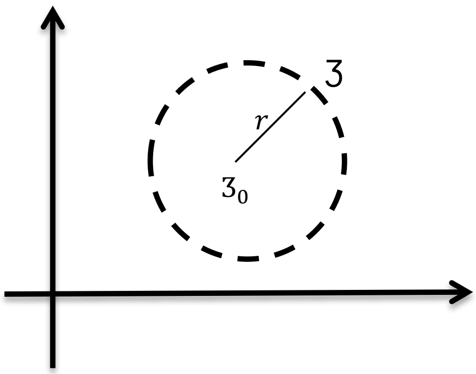
الحل

$$[1]\ \ |z-z_0|\le r$$

هذه المجموعة تمثل مجموعة نقاط المستوي الذي تبعد عن z_0 بمقدار أصغر أو يساوي r أي هي القرص مركزة z_0 ونصف قطره r مع المحيط



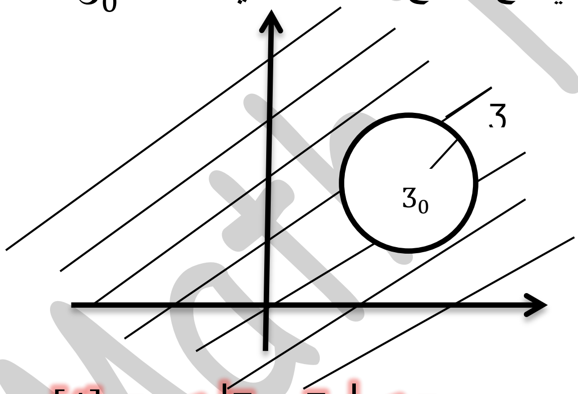
$$[2]\ \ |\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0|<r$$



تمثل القرص الذي مركزه $\mathfrak{z}_0$ ونصف قطره r دون المحيط

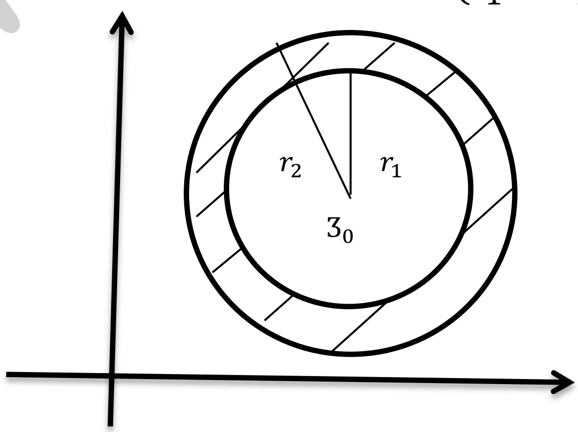
$$[3]\ \ |\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0|>r$$

هذه المجموعة تمثل النقاط التي تقع خارج القرص الذي مركزه $\mathfrak{z}_0$ ونصف قطره r بلا المحيط



$$[4]\ \ r_1<|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0|<r_2$$

لدينا من الفرض $(r_1<r_2)$ وهذه المجموعة تمثل مجموعة النقاط المحصورة بين محيط الدائرتين c_2, c_2

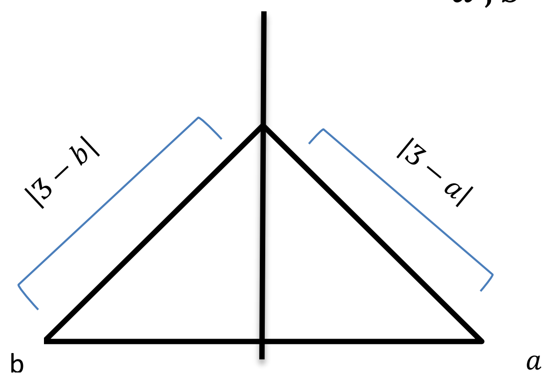


$$[5]\ |\mathfrak{z}-a|=|\mathfrak{z}-b|$$

نناقش حالتين

١- إذا كان $a=b$ فالمجموعة تمثل كامل المستوي العقدي

٢- إذا كان $a \neq b$ فهي مجموعة الأعداد العقدية التي يكون بعدها عن b مساوياً لبعدها عن a فهي تمثل محور القطعة المستقيمة التي طرفاها $a\,,b$

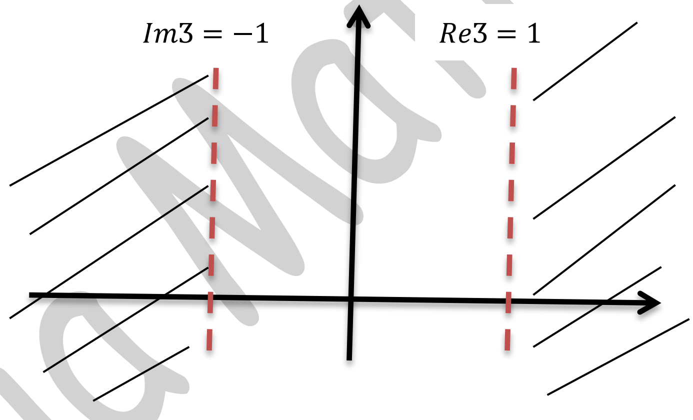


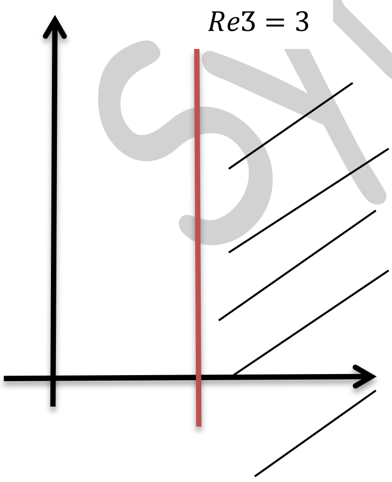
[6] $|Re3| > 1$

إن $Re(z)$ هي القسم الحقيقي من z و بالتالي إن المتراجحة $|\text{Re}3| > 1$ تكافئ أن $\text{Re}3 > 1$ أو $\text{Re}3 < -1$

و هذه المجموعة تمثل القسم من المستوي الواقع على يمين المستقيم $Re3 = 1$ دون المستقيم

بالإضافة لقسم المستوي الواقع على يسار المستقيم $Re3 = -1$ دون المستقيم (لأن المتراجحة أكبر تماماً)





[7] $Re(3-2) \geq 1$

$$Re(3) - Re(2) \geq 1$$

$$Re(3) - \underbrace{Re(2)}_{=2} \geq 1$$

$$Re(3) \geq 3$$

و هي تمثل نصف المستوي الواقع على يمين المستقيم $Re3 = 3$ مع المستقيم

والأن سنبدأ بمحاضرتنا

التمثيل الكروي للأعداد العقدية (الأسقاط المجساوي)

إن التطبيق الذي يقرن كل نقطة في المستوي العقدي (عدد عقدي) بمسقط على الكرة سيكون (تقابل)بين المستوي العقدي و$S^2 \setminus \{N\}$ نسمي هذا التقابل بين الكرة والمستوي العقدي بالإسقاط الكروي (الإسقاط المجساوي)

***طريقة أسقاط نقاط المستوى على الكرة :**

نصل بين النقطة في المستوي العقديox_1x_2 والقطب الشمالي عندئذ نسمي نقطة تقاطع بالمسقط الكروي للعدد العقدي

***وأن من خلال هذا التطبيق نلاحظ ما يلي :**

١ـ كل نقطة على الكرة يقابلها عدد عقدي واحد في المستوي العقدي والعكس صحيح أي أن كل عدد عقدي في المستوي العقدي يقابلها نقطة على الكرة

٢ـصور داخل الدائرة الواحدة في المستوي العقدي ومع تطبيق الأسقاط هي النصف السفلي لكرة ريمان(الواقعة تحت المستوي ox_1x_2)

٣-إن الصور نقاط الدائرة الواحدة في المستوي العقدي وفق تطبيق الأسقاط هي ذاتها دائرة الواحدة

٤-إن صور النقاط الواقعة خارج الدائرة الواحدة في المستوي عقدي ستكون نقاط النصف العلوي في كرة ريمان (أي النصف الواقع فوق المستوى ox_1x_2)

◄**ملاحظة** : نسمي النهاية (صورة $\lim_{p\to N}(p$

بنقطة اللانهايه ونرمز لها بالرمز∞ كما نسمي المجموعة $\mathbb{C}_\infty$

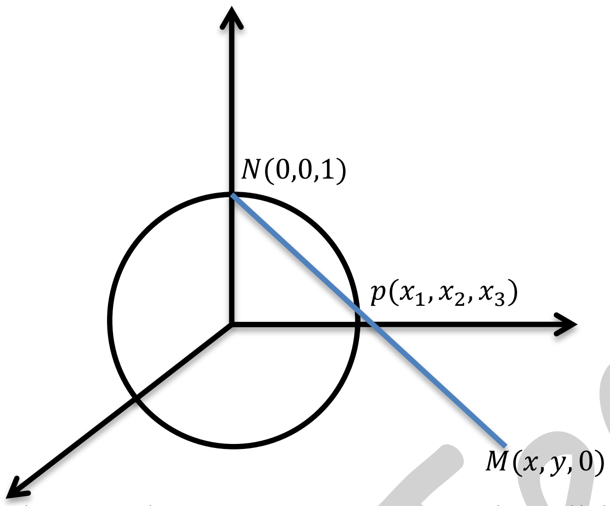
$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ بالمستوي العقدي الموسع أو المولد

◄**تنويه** :أي عدد عقدي سيكون بعده عن المبدأ محدود ، نعم قد يكون كبير لكنه محدود .

لكن نقطة اللانهاية بعدها عن المبدأ غير محدود ولا تنتمي إلى $\mathbb{C}$

تمرين : عين العلاقة بين إحداثيات النقطة الممثلة لعدد عقدي وإحداثيات النقطة الممثلة لذلك العدد على كرة ريمان

الحل:



بفرض M النقطة الممثلة للعدد العقدي $\mathfrak{z} = x + iy$ في المستوي العقدي $M(x,y,o)$

وبفرض $p(x_1,x_2,x_3)$ إحداثيات النقطة الممثلة ل M على الكرة ريمان

الشعاعين $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NP}$ مرتبطين خطياً $\Leftarrow$ فهما متوازيين عندئذ يوجد $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث $\overrightarrow{NP} = \lambda\overrightarrow{NM}$

$$\overrightarrow{NP} = \lambda\overrightarrow{NM}$$

$$(x_1 - 0\,, x_2 - 0, x_3 - 1) = \lambda(x - 0, y - 0,0 - 1)$$

$$(x_1\,, x_2\,, x_3 - 1) = \lambda(x\,, y\,, -1)$$

$$(x_1, x_2, x_3 - 1) = (\lambda x\,, \lambda y\,, -\lambda)$$

$$x_1 = \lambda x \Longrightarrow x_1 = \lambda x$$

$$x_2 = \lambda y \Longrightarrow x_2 = \lambda y$$

$$x_3 - 1 = -\lambda \Longrightarrow x_3 = 1 - \lambda$$

تبولوجيا الأعداد العقدية

ليكن $\mathbb{C}$ فضاء متجهي ولنعرف التابع :

$$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\mathfrak{z} \longmapsto |\mathfrak{z}| = \sqrt{(Re\mathfrak{z})^2 + (Im\mathfrak{z})^2}$$

إن هذا التابع يعرف نظيماً على $\mathbb{C}$ ومنه

$(\mathbb{C}\,,|\cdot|)$يعد فضاء منظم لأنه يحقق شروط النظيم :

$$1-\ |z|\geq 0 \leftrightarrow \sqrt{(Re z)^2+(Im z)^2}\geq 0$$

$$2-|z|=0 \leftrightarrow \sqrt{(Re z)^2+(Im z)^2}=0 \leftrightarrow (Re z)^2+(IM z)^2=0$$

مجموع مقدارين غير سالبين يساوي الصفر فحتماً أن كل منهما يساوي الصفر

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix}(Re z)^2=0\\(Im z)^2=0\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}Re z=0\\Im z=0\end{pmatrix} \leftrightarrow z=0$$

$$3-\ |\lambda z|=\sqrt{(\lambda Re z)^2+(\lambda Im z)^2}=\sqrt{\lambda^2[(Re z)^2+(Im z)^2]}$$

$$=|\lambda|\sqrt{(Re z)^2+(Im z)^2}=|\lambda||z|$$

$4-$ فضاء منظم$(\mathbb{C}\,,|\cdot|) \longleftarrow$ متراجحة مثلث

ونعلم أنه كل فضاء منظم هو فضاء متري لكن العكس غير صحيح بالضرورة

$d(z_1\,,z_2)=|z_1-z_2|$ و هذه المسافة هي نفسها المسافة المألوفة

كما نعلم أن كل فضاء متري هو فضاء تبولوجي

والآن لنعرف بعض المفاهيم التبولوجية في $\mathbb{C}$

1 **القرص المفتوح** : لتكن $r>0$ و a ثابت عقدي

نسمي المجموعة $\{z\in\mathbb{C}\ :|z-r|<r\}$ قرصاً مفتوحاً مركزه a ونصف قطره r

2 **جوار نقطة a :** نسمي أي قرص مفتوح مركزه a جواراً لـ a

ملاحظة: عندما نقول جوار ونسكت فنقصد به جوار مفتوح ، وبالنسبة لنافي التحليل العقدي الجوار هو القرص مفتوح مركزه نقطة ما

3 **داخل مجموعة :** لتكن $A\subseteq\mathbb{C}\,,A$ $a\in A$ نقول عن a أنها نقطة داخلية في A إذا وفقط إذا وجدله جوار محتوى في A ونرمز لمجموعة النقاط الداخلية بمجموعة A°

$$a\in A^\circ \Leftrightarrow \exists\delta>0: D(a\,,\delta)\subseteq A$$

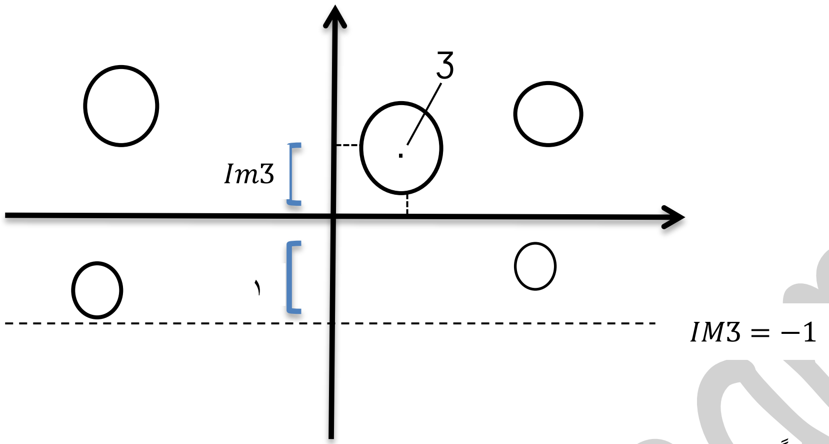
4 **المجموعة المفتوحة :** نقول عن مجموعة A أنها مفتوحة إذا كانت جميع نقاطها داخلية فيها أي $(A\subseteq A^\circ)$ وبما أن الاحتواء المعاكس $(A^\circ\subseteq A)$ محقق دوماً

من الواضح $A\subseteq A^\circ$ لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة

مفتوحة $A=A^\circ \Leftrightarrow A\subseteq\mathbb{C}$

مثال: مثل المجموعة التالية ثم بين فيما إذا كانت مفتوحة أولا ؟؟!!!

$$[1]\ A = \{z \in \mathbb{C}\,; Im z > -1\}$$



إن A تمثل هندسياً نصف المستوي العقدي الواقع فوق المستقيم $Im z = -1$ دون المستقيم

هندسياً: واضح أن A مفتوحة لأن أي نقطة نستطيع إيجاد كرة مفتوحة لها

تحليلياً: لتكن $z \in A \leftarrow Im z > -1$

$$\exists \delta_z = Im z + 1 > 0$$

نقسم δ على 2 كي نقطع الشك فإن الدائرة لا تم المستقيم $Im z = -1$ بالتالي أصبح

$$\delta_z = \frac{Im z + 1}{2} > 0$$

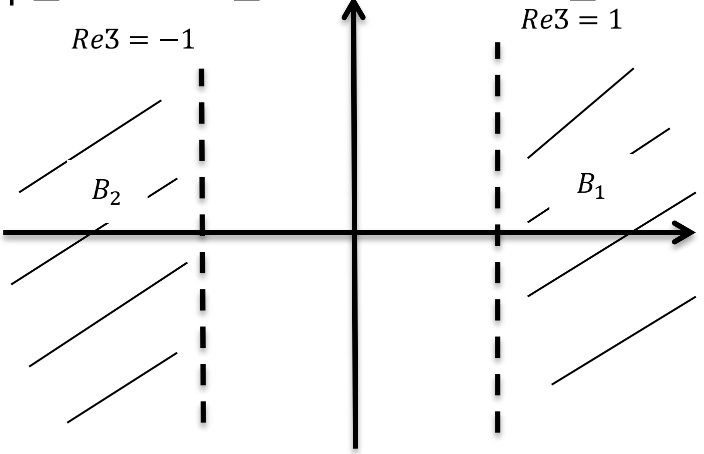
إن القرص المفتوح $D(z\,, \delta_z) \subseteq A$

$\leftarrow z \in A^\circ \leftarrow A \subseteq A^\circ$

$\Leftarrow$ المجموعة A مفتوحة

$$[2]\ \ B = \{z \in \mathbb{C} :\ |Re z| \geq 1\}$$

$$|Re z| \geq 1 \ \ \rightarrow \ \ 1 \leq Re z \quad or \quad Re z \leq -1$$



إن $|Re3| \geq 1$ تمثل نصف المستوي الواقع على يمين المستقيم $Re3 = 1$ مع المستقيم سنرمز لها بـB_1

بالإضافة لنصف المستوي الواقع على يسار المستقيم $Re3 = -1$ مع المستقيم سنرمز لها بـB_2

بالتالي فأن B تمثل هندسياً $B = B_1 \cup B_2$

*كما أن المجموعة B ليست مفتوحة لأن أي نقطة من المستوي $Re3 = 1$ أو $Re3 = -1$ لن تكون داخلية في B

انتهت المحاضرة

إعداد: مهيار طعمة – شهناز طاطيش – يمنى خرما

أًصدقائنا نعتذر عن ورود الأخطاء التالية في المحاضرات السابقة و نورد التصحيح حرصاً على توخي الدقة العلمية

موقع ورود الخطأ	الخطأ	التصحيح
المحاضرة ٥ – التذكرة في أول صفحة	$tan\theta = \frac{x}{y}$	$tan\theta = \frac{y}{x}$
المحاضرة ٥ –دستور دوموافر –ص٢	$(cos\theta + isin\theta)^n = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)$	$(cos\theta + isin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
المحاضرة ٤ – مثال٢- ص٤	$tan\theta = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$	$tan\theta = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$