◄ دكتورة المادة: رشا بعاج

◄ المحاضرة: السابعة والثامنة

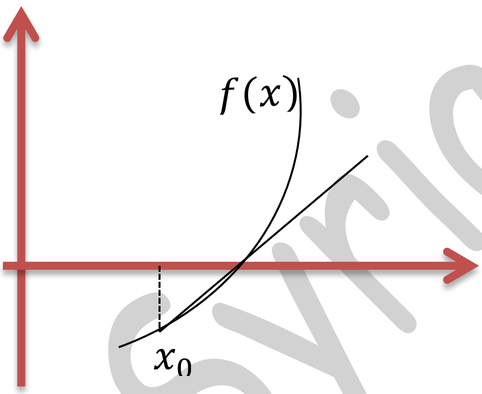
مرحبا اصدقائي: سنتابع معكم حل المعادلات غير الخطية ، الطرق المجالية حيث تحدثنا عن طريقة تنصيف المجال وطريقة الوضع الخاطئ واليوم نتابع معكم طريقة نيوتن وطريقة القاطع .

طريقة نيوتن:

- لا تعتمد هذه الطريقة على مجال وإنما تعتمد على نقطة ابتدائية $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

أي تعتمد طريقة نيوتن على نقطة اختيارية تعتبر تقريب أولي للجذر نسمي عادة هذه النقطة x_0 ثم نرسم المماس للدالة في النقطة $(x_0, f(x_0))$ ومن تقاطع هذا المماس مع المحور ox نحصل على نقطة جديدة x_1 تعتبر الجذر التقريبي الجديد ونكرر هذا العدد حتى نحصل على الجذر المطلوب ، تعطى النقطة x_n بالعلاقة:

$$x_{(n+1)} = x_n - \left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]$$



أو

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

ثم نكرر العمل للحصول على الجذر التقريبي المطلوب.

- **خوارزميّة طريقة نيوتن:**

١) تحديد شرط التوقف ε .

٢) تحديد النقطة الابتدائية x_0

٣) $x_{(n+1)} = x_n - [\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}]$

٤) إذا تحقق شرط التوقف عندئذ x هي الجذر التقريبي المطلوب

٥) العودة إلى الخطوة (٣)

مثال: أوجد باستخدام طريقة نيوتن جذر الدالة $f(x) = x^6 - x - 1$

بدقة $\varepsilon(x) = (10)^{-8}$ ، من أجل التقريب الابتدائي $x_0 = 1.5$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	1,5	8,890625	44,5625	
1	1,300490884	2,537264152	21,31967219	0,199509116
2	1,181480417	0,538458592	12,81286885	0,119010467
3	1,13945559	0,04923525205	10,52492922	0,042024827
4	1,134777625	$5,503199213.10^{-4}$	10,2902893	$4,677965.10^{-3}$
5	1,134724145	$6,7882717.10^{-8}$	10,2876291	$5,348.10^{-5}$
6	1,134724138	$-4,130684.10^{-9}$	10,28762875	7.10^{-9}

حيث $f'(x) = 6x^5 - 1$

نعوض بالقانون:
$$x_{(n+1)} = x_n - \left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]$$

$$ex: \quad x_1 = 1.5 - \left[\frac{8.890625}{44.5625}\right] = 1.300490884$$

التكرار (٦) هو الجذر التقريبي المطلوب و هو $x_6 = 1,134724138$

حيث $7.10^{-9} < \varepsilon(x) = 1.10^{-8}$

وبنفس الطّريقة أوجدنا الجدول بأكمله.

- **مساوئ طريقة نيوتن:**

١) إذا تم اختيار القيمة الابتدائيّة للجذر في جوار نقطة انعطاف الدالة فإن هذا يؤدي إلى تباعد سلسلة الجذور أي تفشل الطريقة

٢) بما أنّ العلاقة التّكراريّة تحوي على مشتق الدالة فيجب الانتباه إلى عدم مساواة هذا المشتق للصفر أو قربه الشديد من الصفر لأن هذا يجعل القيمة الجديدة كبيرة جداً بالمقارنة مع القيم السابقة

٣) بعض الدّوال تتأرجح حول الجذر و هذا يسبب مشكلة في الحصول على الجذر التقريبي .

تقدير الخطأ لطريقة نيوتن **نطبق** : $\lvert x_n - x_{n-1} \rvert \le \varepsilon$

تمرين:

لتكن لدينا المعادلة : $e^x + x = 0$ المطلوب :

١) استخدم طريقة نيوتن للحصول على جذرين تقريبيين للمعادلة السابقة من أجل التقريب الابتدائي $x_0 = 0$ واحسب الخطأ المرتكب .

٢) ما هي مرتبة تقارب هذه الطريقة وأوجد ثابت التقارب .

(الحل)

١) $f(x) = e^x + x \quad => \quad f'(x) = e^x + 1$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$=> \qquad x_n = x_{n-1} - \frac{(e^x + x)}{e^x + 1}$$

$$x_0 = 0 \qquad => \qquad x_1 = 0 - \frac{(e^0 + 0)}{e^0 + 1} = -0{,}5$$

$$=> \quad x_2 = -0{,}5 - \frac{(e^{-0{,}5} - 0{,}5)}{e^{-0{,}5} + 1} = -0{,}5663110030032$$

$$|x_1 - x_0| = 0{,}5$$

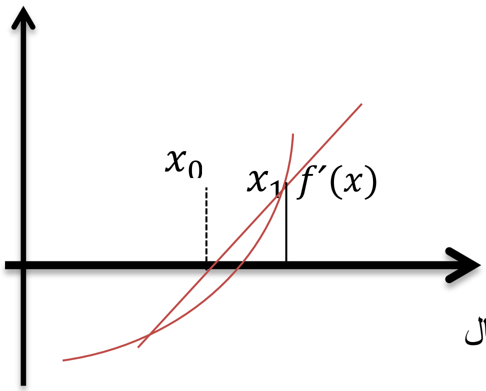
$$|x_2 - x_1| = 0{,}066311003197218$$

الخطأ الأعظمي المرتكب $E_{max} = |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

انتهت المحاضرة السابعة

المحاضرة الثامنة:

طريقة القاطع:



قد جرى الروتين في الطّرق المجالية السابقة

التي تعرفنا عليها أن يكون للدالة $f(x)$ جذر محصور في مجالنا

المعطى $[x_0, x_1]$ حيث أننا نقوم باختيار شرط البدء

وهو $f(x_0).f(x_1) < 0$ فإذا كان محقق عندئذٍ يوجد جذر للدالة في هذا المجال

أمّا في هذه الطريقة (طريقة القاطع) يختلف الكلام.

القانون العام للنقطة :

$$x_n = x_{n-1} - \left[\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}\right] . f(x_{n-1})$$

- بفرض لدينا قيمتين تقريبيتين x_0 وَ x_1 لا يفترض أن تكونا بجهة مختلفة بالنسبة لجذر الدالة ، عندئذ نحصل على الجذر التقريبي الأول بطريقة القاطع ل x_2 من العلاقة :

$$x_2 = x_1 - \left[\frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0}\right] f_1$$

والناتجة عن تقاطع المستقيم الواصل بين النقطتين (x_0, f_0) وَ (x_1, f_1) والمحور ox وبمتابعة تطبيق هذه العلاقة دون النظر في تحقق الشرط وجود جذر بين النقطتين السابقتين نحصل على الجذر x_n من العلاقة :

$$x_n = x_{n-1} - \left[\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}\right] . f(x_{n-1})$$

تقارب هذه الطريقة أسرع من طريقة تنصيف المجال والخطأ الأعظمي المرتكب هو :

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$$

مثال: أوجد الجذر التقريبي للدالة $f(x) = x^6 - x - 1$ بطريقة القاطع حيث:

$$x_0 = 1 \quad , \quad x_1 = 2 \quad , \quad \varepsilon = 10^{-8}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1	-1	
1	2	61	
2	1,016129032	$-0{,}9153677138$	0,983870968
3	1,030674754	$-0{,}831921416$	0,014545722
4	1,175688948	0,4652272149	0,145014194
5	1,123679064	$-0{,}1106328915$	0,052009884
6	1,133671081	$-0{,}01080592224$	$9{,}992017.10^{-3}$
7	1,134752682	$2{,}936671289.10^{-4}$	$1{,}081601.10^{-3}$
8	1,134724065	$-7{,}57255931.10^{-7}$	$2{,}8617.10^{-5}$
9	1,134724139	$2{,}068379.10^{-9}$	$7{,}4.10^{-8}$
10	1,134724139	$4{,}083223.10^{-9}$	0

◄**ملاحظة :** ليس جميع الطرق المجالية تؤدي إلى نفس النتيجة نفضل طريقة عن طريقة حسب الدالة المعطاة وكلف العمليات المطبقة .

• مقارنة بين طريقة نيوتن وطريقة القاطع:

- تتقارب طريقة نيوتن بشكل أسرع من طريقة القاطع، إلّا أنّ نيوتن تستدعي حساب قيمة الدالة $f(x_n)$ وَ المشتق $f'(x_n)$ عند النقطة بينما لا تحتاج طريقة القاطع إلا لحساب قيمة الدالة فقط وبالتالي فإن طريقة القاطع تحتاج لوقت أقل ويعتمد قرار استخدام إحدى الطريقتين على صعوبة حساب المشتق .

مقارنة بين طريقة الوضع الخاطئ وطريقة القاطع:

	الوضع الخاطئ	القاطع
شرط البدء	وجود جذر ضمن المجال المطلوب	لا يوجد شرط للبدء
القانون	$x_2 = x_1 - \left[\frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0}\right].f_1$	$x_2 = x_1 - \left[\frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0}\right].f_1$
شرط القيمة التالية	$f(x_2).f(x_1) < 0$	لا يوجد شرط
تتالي النقاط	لا يوجد تتالي	النقاط متتالية $x_n, \dots, x_2, x_1, x_0$
السرعة	بطيئة	سريعة

مثال): لتكن لدينا الدالة : $e^{-x} - x = 0$ والمطلوب :

١) استخدم طريقة القاطع للحصول على الجذر التقريبي x_3 حيث $x_1 = 2$ و $x_0 = 1$
٢) ما هو الخطأ الأعظمي المرتكب في حساب الجذر؟
٣) ما هي مرتبة تقارب هذه الطريقة ؟

(الحل)

i	x_i	$f(x_i)$	$\|x_i - x_{i-1}\|$
0	1	$-0,6321205588$	
1	2	-1.864664717	
2	0,4871416536	0,127238344	1,512858346
3	0,5837796851	$-0,02599356368$	0,0966380315

انتهت المحاضرة الثامنة

تصحيح الخطأ الوارد في المحاضرة السادسة: أسفل الجدول ، السطر (١٦ و١٧) نكتب :

إذا: $E_{max} = \left|\frac{\lambda}{\lambda-1}\right| |x_n - x_{n-1}| = 0,0000008237066048 < \varepsilon = 0,005$

إذا الجذر التقريبي المطلوب هو $x_2 = 1.887042648$ على المجال $[1,2]$

إعداد: راما جوهر & هديل سعيد & علا الدالاتي