نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة : الثامنة                    عنوان المحاضرة : تبولوجيا الأعداد العقدية

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

**متابعة بتعريف المفاهيم التوبولوجيا**

---

لقد ذكرنا في المحاضرة السابعة أن $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ فضاء منظم بالتالي فضاء متري وفضاء تبولوجي (لأن كل فضاء متري هو فضاء تبولوجي)

**كما بدأنا بتعريف بعض المفاهيم التبولوجية في $\mathbb{C}$ منها :**

١- **القرص المفتوح** :

ليكن $r > o$ و $a$ عدد ثابت نسمي المجموعة $\{z \in \mathbb{C} ;\ |z - a| < r\}$ قرص مفتوح مركزه $a$ ونصف قطره $r$ ونرمز له بالرمز $D(a\,, r\,)$

٢- **جوار نقطة $a$:**

نسمي أي قرص مفتوح مركزة $a$ جواراً لـ $a$

٣- **داخل مجموعة** :

$$a \in A^{\circ} \Leftrightarrow \exists\, \delta > o\,; D(a\,, r) \subseteq A$$

٤- **المجموعة المفتوحة** :

$$A \subseteq \mathbb{C} \text{ مجموعة مفتوحة } \Leftrightarrow A \subseteq A^{\circ}$$

كما نعلم أن $A^{\circ} \subseteq A$ لذلك نستطيع أن نقول بأن

$$A \text{ مفتوحة } \leftrightarrow A = A^{\circ}$$

**والأن سنتابع بتعريف مفاهيم تبولوجية على $\mathbb{C}$**

---

٥- **المجموعة المغلقة** :

$$A \subseteq \mathbb{C} \text{ مغلقة } \Leftrightarrow A^{c} = \mathbb{C} \backslash A \text{ مفتوحة}$$

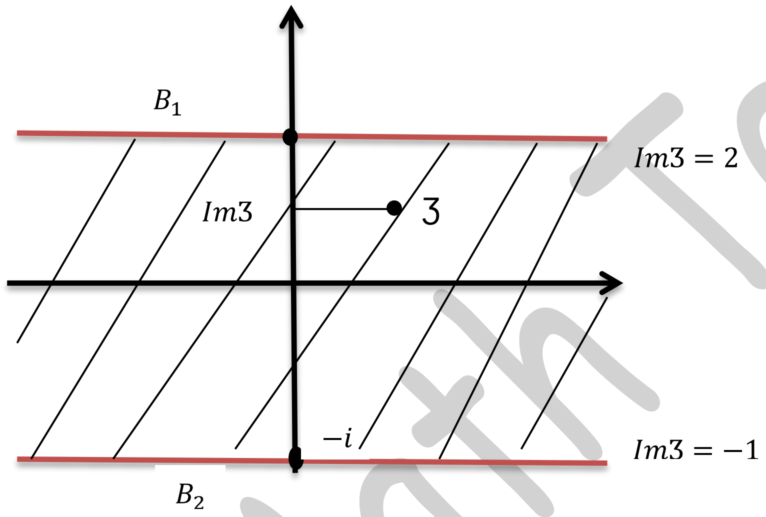
## تمرين

مثل في مستوي العقدي المجموعة $A$

$$A = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; -1 \le Im z \le 2\}$$

ثم أثبت أنها مجموعة مغلقة

## الحل




هندسياً $A$ تمثل الشريط الأفقي المحصور بين المستقيم $Im z = -1$ , $Im z = 2$ مع المستقيم

$$A^c = \mathbb{C} \backslash A = \{z \in \mathbb{C} \; ; Im z < -1 \vee Im z > 2\}$$

$$A^c = B_1 \cup B_2$$

$A^c$ مفتوحة لأن

$z \in A^c$ ← أما $Im z < -1 \to -Im z - 1 < 0$

$$\exists \delta_z = \frac{-Im z - 1}{2} > 0 \; , D(z , \delta_z) \subseteq A^c$$

أو $Im z > 2 \to Im z - 2 > 0$

$$\exists \delta_z = \frac{Im z - 2}{2} > 0 \; , D(z , \delta_z) \subseteq A^c$$

وفي كلا الحالتين $z \in (A^c)^\circ$

$A^c$مفتوحة ← $A$ مغلقة

لكن $A$ ليس مفتوحة لأن لدينا نقطة من $A$ هي $-i$ ولكنها ليست داخلية في $A$

## مثال على مجموعة غير مفتوحة وغير مغلقة

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,;\, -1 < Imz \leq 2\}$$

إن $D$ ليست مفتوحة لأن النقطة $2i$ تنتمي لها وليست داخلية منها أنه لا يوجد قرص مركزه $2i$ ومحتوى بكامله بالمجموعة

وهي مجموعة ليست مغلقة لأن $-i$ تنتمي إلى متممتها $D^c$ ولكنها ليست داخلية في $D^c$ أي أن المتممة ليست مفتوحة

**مثال: على مجموعة مفتوحة ومغلقة هي $\mathbb{C}$ بأكملها**

**٦- نقطة تجمع (تراكم) مجموعة أو نقطة حدية لمجموعة :**

لتكن $A \subseteq \mathbb{C}$ نقول عن نقطة $a \in \mathbb{C}$ أنها نقطة تجمع لـ $A$ إذا وفقط أذا تحقق ما يلي :

$$\forall z > 0 \,;\, D(a\,, z) \cap A \backslash \{a\} \neq 0$$

ونرمز لمجموعة بالنقاط الحدية بالرمز $A'$ نسميها المجموعة المشتقة

**ملاحظة◄** المجموعة المشتقة لمجموعة منتهية هي خالية $A$مغلقة $\leftrightarrow A' \subseteq A$

## مثال

$$A = \{z_1\,, z_2, \dots \dots, z_n\}$$

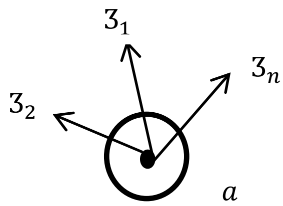
لنفرض جدلاً أن لهذه المجموعة نقطة تجمع $a$ عندئذ نناقش حالتين :

١- $a \in A^c$ نأخذ بعد النقطة $a$ عن كلاً من $z_1, z_2, \dots \dots, z_n$ وجميع هذه الأبعاد لا تساوي الصفر لأن $a \in z_i$ حيث أن $i = 1,2, .. n$ ولنأخذ

$$\delta = \frac{\min(d(a, z_1), d(a, z_2), \dots \dots, d(a\,, z_n))}{2}$$

عندئذ : $D(a\,, \delta) \cap A = \emptyset$

بالتالي $a$ ليست حدية



٢- $a \in A$ أي تكون $a$ مساوياً لأحد النقاط $z_1, z_2, \dots\dots, z_n$ فنأخذ بعد هذه النقطة عن هذه الأبعاد بنفس الطريقة نأخذ الـ $min$ بين بعد $a$ , $z_i$ حيث أن $i = 1,2,..n$ ونأخذ القرص الذي مركزه هذه النقطة ونصف قطره ذلك البعد

والآن هذا القرص سيتقاطع مع المجموعة بالنقطة نفسها

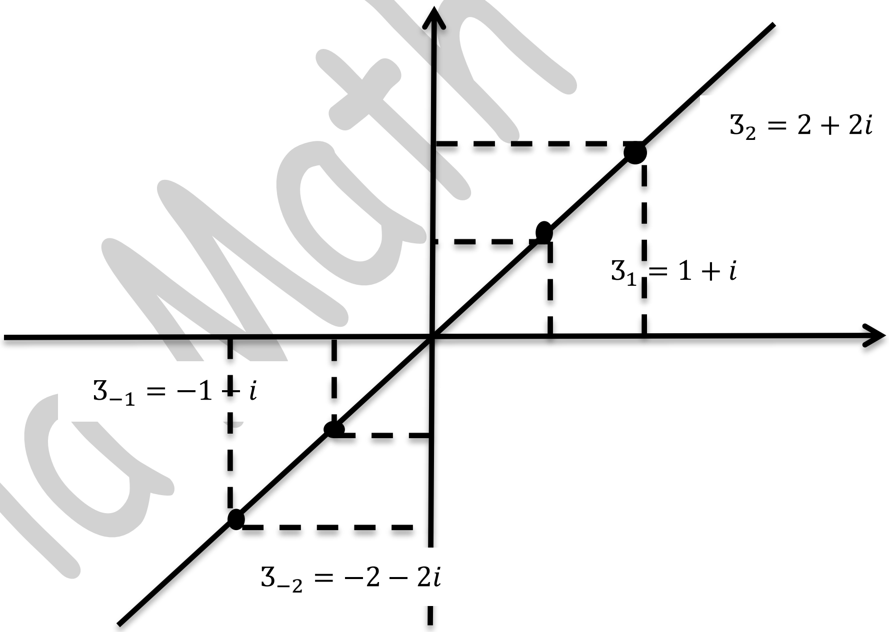
$\longleftarrow$ $a$ ليست حدية

بالتالي الفرض خاطئ فلا يوجد نقطة تجمع أو نقطة حدية لمجموعة منتهية

◄**ملاحظة** ليس من ضروري أن تملك مجموعة غير منتهية نقاط تجمع

## مثال

$$A = \{z_m = m + im\,; m \in Z^*\}$$




$a \in \mathbb{C}$ ولنميز حالات التالية :

[1] $a \in A \Leftarrow \exists m_0 \in \mathbb{Z}\,;\ a = m_0 + im_0$

بحيث $D\left(a\,,\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \cap A = \{a\}$ أو بصيغة أخرى $D\left(a\,,\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \cap A\backslash\{a\} = \emptyset$

[2] $a$ تنتمي إلى منصف الرابع الأول والثالث وليست من $A$ ومنه يوجد $m \in \mathbb{Z}$ بحيث تكون $a$ واقعة بين النقطتين $z_m$ , $z_{m+1}$ دون أن تكون واحدة منها

$$\delta = \frac{\min(|3_m - a|, |3_{m+1} - a|)}{2} > 0$$

$D(a\,,\delta) \cap A\backslash\{a\} = \emptyset$

و $a$ ليست نقطة تجمع لـ$A$

[3] $a$ ليست من المنصف للربع الأول والثالث ولنرمز له بـ $L$ عندئذ:

$$\delta = \frac{d(a\,,L)}{2} > 0$$

$D(a,\delta) \cap A\backslash\{a\} = \emptyset$

و $a$ ليست نقطة تجمع لـ $A$

تمرين وظيفة :

أثبت أن للمجموعة $B = \left\{3_m = \frac{1}{m} + i\frac{1}{m}\;; m \in N\right\}$ نقطة تجمع وحيدة $3 = 0$

٧- **لصاقة مجموعة** : $a \in \mathbb{C}\,, A \subseteq \mathbb{C}$ نقول عن $a$ أنها نقطة ملاصقة لـ $A$ إذا حوى أي جوار لها نقطة واحدة على الأقل من $A$ كما نرمز لمجموعة النقاط الملاصقة لـ $A$ بالرمز $\bar{A}$

◄**ملاحظة** :

1- إن $A \subseteq \bar{A}$ لكن الاحتواء المعاكس غير صحيحة بالحالة العامة ألا إذا كانت المجموعة $A$ مغلقة عندئذ نستطيع أن نقول :

$A$ مغلقة $\Leftrightarrow \bar{A} = A$ (أي أن لصاقة أي مجموعة منتهية هي مجموعة ذاتها )

2- $\bar{A} = A \cup A'$

3- كل نقطة تجمع هي نقطة ملاصقة

**انتهت المحاضرة**

إعداد: ميار طعمة – شهناز طاطيش – يمنى خرما