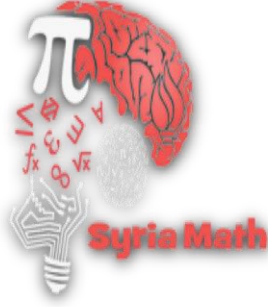


16+22-11-2017

نظري



◀ دكتورة المادة: نور غازي

◀ المحاضرة: الرابعة والخامسة عشر

◀ عنوان المحاضرة: المودولات الإسقاطية والمودولات الأفقية

المودولات الإسقاطية والمودولات الأفقية

تعريف: ليكن P مودول على الحلقة A عندها :

P إسقاطي \Leftrightarrow لأجل كل متتالية تامة من التشاكلات المودولية :

$$\text{عندها فإن التشاكل : } M \xrightarrow{g \text{ غامر}} N \longrightarrow 0$$

$$\text{غامر } g_* : Hom_A(P, M) \longrightarrow Hom_A(P, N)$$

P أفقي \Leftrightarrow لأجل كل متتالية تامة من التشاكلات المودولية :

$$\text{عندها فإن التشاكل : } 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f \text{ متباين}} N$$

$$\text{غامر } f^* : Hom_A(N, P) \longrightarrow Hom_A(M, P)$$

مبرهنة: لتكن $\{M_i\}_{i=1}^n$ أسرة منتهية من المودولات على الحلقة A عندها :

$$(1) \quad \bigoplus_{i=1}^n M_i \text{ إسقاطي} \Leftrightarrow M_i \text{ إسقاطي وذلك مهما يكن } i = 1, 2, \dots, n$$

$$(2) \quad \bigoplus_{i=1}^n M_i \text{ أفقي} \Leftrightarrow M_i \text{ أفقي وذلك مهما يكن } i = 1, 2, \dots, n$$

البرهان:

تنويه قبل البدء إن $\bigoplus_{i=1}^n M_i = \prod_{i=1}^n M_i$ لأن الأسرة منتهية .

-1 \Leftarrow بفرض $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ إسقاطي ولنثبت أن M_i إسقاطي

(سنقوم بتثبيت ال i واثبات صحة المبرهنة من أجلها وبالتالي ستكون المبرهنة صحيحة مهما يكن

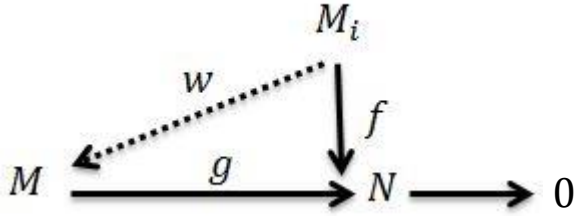
$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

لدينا $M \xrightarrow{\text{غامر } g} N \longrightarrow 0$ متتالية تامة من التشاكلات المودولية والمطلوب اثبات أن :

$$g_* : \text{Hom}_A(M_i, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(M_i, N)$$

ليكن $f \in \text{Hom}_A(M_i, N)$ عنصر كفي من المستقر والمطلوب اثبات أن

$$\exists w \in \text{Hom}_A(M_i, M) : g_*(w) = g \circ w = f$$



لنأخذ التشاكل الإسقاطي Pr_i وهو تشاكل غامر .

$$Pr_i : \bigoplus_{i=1}^n M_i \longrightarrow M_i$$

لكن $\bigoplus_{i=1}^n M_i = \prod_{i=1}^n M_i$ كون الاسرة منتهية

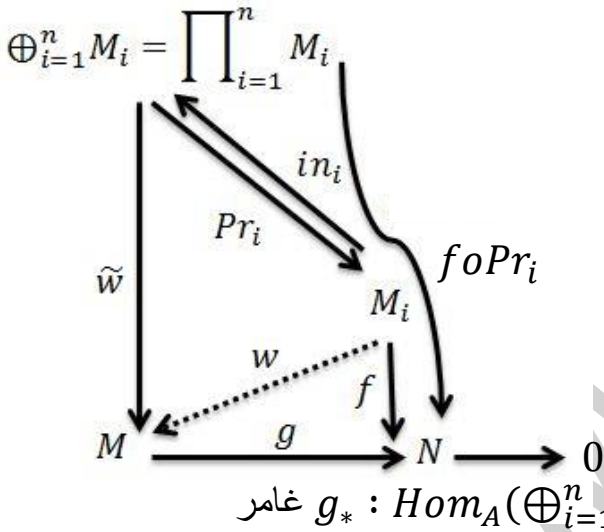
اذا يوجد تشاكل in_i تشاكل الاحتواء القانوني

$$in_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

ولدينا $f \circ Pr_i \in \text{Hom}_A(\bigoplus_{i=1}^n M_i, N)$

ومن كون $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ إسقاطي اذا من أجل كل

متتالية من الشكل $M \xrightarrow{\text{غامر } g} N \longrightarrow 0$ تامة فإن



$$g_* : \text{Hom}_A(\bigoplus_{i=1}^n M_i, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(\bigoplus_{i=1}^n M_i, N)$$

اذا

$$\exists \check{w} \in \text{Hom}_A(\bigoplus_{i=1}^n M_i, M) : g_*(\check{w}) = g \circ \check{w} = f \circ Pr_i \quad (*)$$

اذا

$\check{w} \circ in_i \in \text{Hom}_A(M_i, M)$ ولنرمز ب w ل $\check{w} \circ in_i$ إن w تشاكل لأنه تركيب تشاكلين ومنه

$w \in \text{Hom}_A(M_i, M)$ وبقي اثبات أن $g \circ w = f$

$$g \circ w = \underbrace{g \circ \check{w} \circ in_i}_{\text{حسب * التجميعية محققة}} = f \circ Pr_i \circ in_i = f \circ 1 = f$$

حيث : $Pr_i \circ in_i = 1$ (التطبيق المطابق) . وبالتالي M_i إسقاطي مهما يكن $i = 1, 2, \dots, n$

نبرهن الاتجاه الثاني :

\Rightarrow بفرض M_i إسقاطي مهما يكن $i = 1, 2, \dots, n$

ولنبرهن أن $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ إسقاطي . لدينا

$$M \xrightarrow{\text{غامر } g} N \longrightarrow 0$$

متتالية تامة من التشاكلات المودولية

والمطلوب البرهان أن

$$g_* : Hom_A(\bigoplus_{i=1}^n M_i, M) \longrightarrow Hom_A(\bigoplus_{i=1}^n M_i, N)$$

ليكن $f \in Hom_A(\bigoplus_{i=1}^n M_i, N)$ عنصر كفي من المستقر والمطلوب اثبات أن

$$\exists v \in Hom_A(\bigoplus_{i=1}^n M_i, M) : g_*(v) = g \circ v = f$$

لنأخذ تشاكل الأحتواء القانوني

$$in_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

ولدينا $f \circ in_i \in Hom_A(M_i, N)$

ومن كون M_i إسقاطي مهما يكن $i = 1, 2, \dots, n$

إذا من أجل كل متتالية من الشكل $M \xrightarrow{\text{غامر } g} N \longrightarrow 0$ تامة فإن

$$g_* : Hom_A(M_i, M) \longrightarrow Hom_A(M_i, N)$$

وذلك مهما كانت $i = 1, 2, \dots, n$ إذاً

$$\exists v_i \in Hom_A(M_i, M) : g_*(v_i) = g \circ v_i = f \circ in_i \quad \text{☺}$$

وهذا محقق مهما يكن $i = 1, 2, \dots, n$ والان لبنني العلاقة

$$v : \bigoplus_{i=1}^n M_i \longrightarrow M$$

$$(m_1, \dots, m_n) \in \bigoplus_{i=1}^n M_i : v(m_1, \dots, m_n) = v_1(m_1) + \dots + v_n(m_n)$$

والآن لنبرهن أن $g \circ v = f$

$$(m_1, \dots, m_n), (m_1^1, \dots, m_n^1) \in \bigoplus_{i=1}^n M_i : \varphi, \beta \in A$$



إن v تطبيق لأن :

$$(m_1, \dots, m_n) \stackrel{\cong}{=} (m_1^1, \dots, m_n^1)$$

المركبات المتقابلة متساوية

$$\Rightarrow m_i = m_i^1 : i = 1, 2, \dots, n \text{ وذلك مهما كانت}$$

مهما يكن $i=1, 2, \dots, n$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{v_i \text{ تطبيق}} v_i(m_i) = v_i(m_i^1)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{لنأخذ المجموع}} v_1(m_1) + \dots + v_n(m_n) = v_1(m_1^1) + \dots + v_n(m_n^1)$$

$$\Rightarrow v(m_1, \dots, m_n) = v(m_1^1, \dots, m_n^1)$$

إن v تشاكل لأن :

$$v(\varphi(m_1, \dots, m_n) + \beta(m_1^1, \dots, m_n^1))$$

$$= v((\varphi m_1, \dots, \varphi m_n) + (\beta m_1^1, \dots, \beta m_n^1))$$

$$\stackrel{\cong}{=} v_1(\varphi m_1 + \beta m_1^1) + \dots + v_n(\varphi m_n + \beta m_n^1)$$

حسب تعريف v

مهما يكن $i=1, 2, \dots, n$

$$\underbrace{\cong}_{\text{كون } v_i \text{ تشاكل}} \varphi v_1(m_1) + \beta v_1(m_1^1) + \dots + \varphi v_n(m_n) + \beta v_n(m_n^1)$$

$$= \varphi(v_1(m_1) + \dots + v_n(m_n)) + \beta(v_1(m_1^1) + \dots + v_n(m_n^1))$$

$$= \varphi v(m_1, \dots, m_n) + \beta v(m_1^1, \dots, m_n^1)$$

ومنه $g \circ v = f$ ولنبرهن أن $v \in \text{Hom}_A(\bigoplus_{i=1}^n M_i, M)$

لتكن $(m_1, \dots, m_n) \in \bigoplus_{i=1}^n M_i$ عندئذ :

$$g \circ v(m_1, \dots, m_n) = g(v(m_1, \dots, m_n))$$

حسب تعريف v نجد :

$$= g(v_1(m_1) + \dots + v_n(m_n)) \stackrel{\cong}{=} g(v_1(m_1)) + \dots + g(v_n(m_n))$$

g تشاكل

$$= g \circ v_1(m_1) + \dots + g \circ v_n(m_n)$$

$$\begin{aligned}
 \text{😊 حسب} &= f \circ in_1(m_1) + \dots + f \circ in_n(m_n) \\
 &= f(in_1(m_1)) + \dots + f(in_n(m_n)) \\
 &\stackrel{\text{تشاكل } f}{=} f(in_1(m_1) + \dots + in_n(m_n)) \\
 &\stackrel{\text{حسب قاعدة ربط } in_i}{=} f((m_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, m_n)) \\
 &= f(m_1, \dots, m_n) \\
 &\Rightarrow g \circ v = f
 \end{aligned}$$

أي أن $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ إسقاطي

تنويه: لقد قمنا هنا ببناء العلاقة v لأنه لو أخذنا $Pr_i: \bigoplus_{i=1}^n M_i \rightarrow M_i$ وقلنا أن

$$v_i \circ Pr_i \in \text{Hom}(\bigoplus_{i=1}^n M_i, M)$$

وبذلك سوف يكون لدينا مشكلة في اثبات أن المخطط تبديلي لأنه لا يتحقق.

-٢ \Leftarrow بفرض $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ أفقي ولنثبت أن M_i أفقي

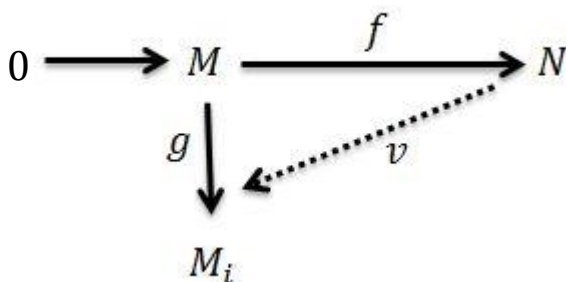
(سنقوم بتثبيت ال i واثبات صحة المبرهنة من أجلها وبالتالي ستكون المبرهنة صحيحة مهما يكن $(i = 1, 2, \dots, n$

لدينا $0 \rightarrow M \xrightarrow{\text{متباين } f} N$ متتالية تامة من التشاكلات المودولية والمطلوب اثبات أن :

$$f^* : \text{Hom}_A(N, M_i) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, M_i)$$

ليكن $g \in \text{Hom}_A(M, M_i)$ عنصر كيفي من المستقر والمطلوب اثبات أن

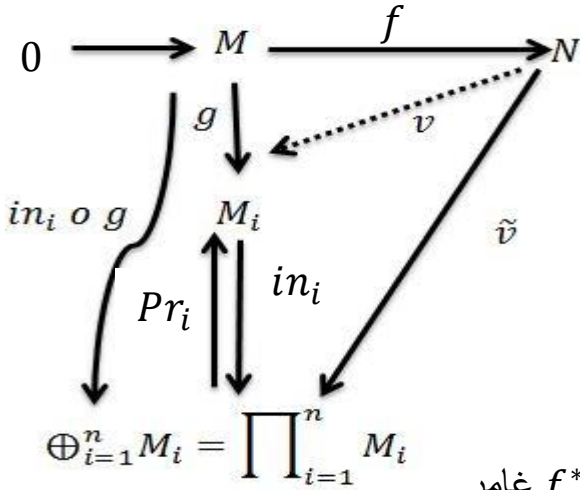
$$\exists v \in \text{Hom}_A(N, M_i) : f^*(v) = v \circ f = g$$



لنأخذ التشاكل in_i تشاكل الاحتواء القانوني

$$in_i : M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

لكن $\bigoplus_{i=1}^n M_i = \prod_{i=1}^n M_i$ كون الأسرة منتهية



إذا يوجد تشاكل Pr_i تشاكل الإسقاط القانوني

$$Pr_i : \bigoplus_{i=1}^n M_i \longrightarrow M_i$$

ولدينا $in_i \circ g \in Hom_A(M, \bigoplus_{i=1}^n M_i)$

ومن كون $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ أفقي إذا من أجل كل متتالية من الشكل

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N$$

$$f^* : Hom_A(N, \bigoplus_{i=1}^n M_i) \longrightarrow Hom_A(M, \bigoplus_{i=1}^n M_i)$$

إذا

$$\exists \check{v} \in Hom_A(N, \bigoplus_{i=1}^n M_i) : f^*(\check{v}) = \check{v} \circ f = in_i \circ g \quad @$$

إذا

$Pr_i \circ \check{v} \in Hom_A(N, M_i)$ ولنرمز ب v ل $Pr_i \circ \check{v}$ إن v تشاكل لأنه تركيب تشاكلين ومنه

$v \in Hom_A(N, M_i)$ وبقي اثبات أن $v \circ f = g$

$$v \circ f = \underbrace{Pr_i \circ \check{v} \circ f}_{\text{حسب @ التجميعية محققة}} = Pr_i \circ in_i \circ g = 1 \circ g = g$$

حيث : $Pr_i \circ in_i = 1$ (التطبيق المطابق). وبالتالي M_i أفقي مهما يكن $i = 1, 2, \dots, n$

لنبرهن الاتجاه الثاني :

\Rightarrow بفرض M_i أفقي مهما يكن $i = 1, 2, \dots, n$ ولنبرهن أن $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ أفقي . لدينا

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

$$f^* : Hom_A(N, \bigoplus_{i=1}^n M_i) \longrightarrow Hom_A(M, \bigoplus_{i=1}^n M_i)$$

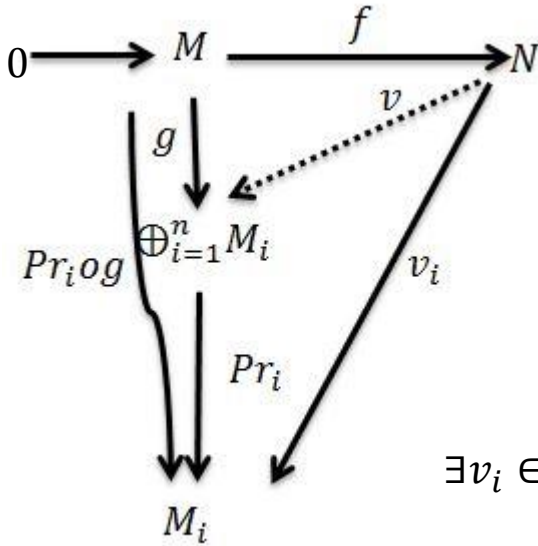
ليكن $g \in Hom_A(M, \bigoplus_{i=1}^n M_i)$ عنصر كفي من المستقر والمطلوب اثبات أن

$$\exists v \in Hom_A(N, \bigoplus_{i=1}^n M_i) : f^*(v) = v \circ f = g$$

لنأخذ تشاكل الإسقاط

$$Pr_i : \bigoplus_{i=1}^n M_i \longrightarrow M_i$$

$$\bigoplus_{i=1}^n M_i$$



ولدينا $Pr_i \circ g \in Hom_A(M, M_i)$ ومن كون M_i أفقي مهما يكن $i = 1, 2, \dots, n$ اذا من أجل كل متتالية

من الشكل $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ متباين تاماً فإن

غامر $f^* : Hom_A(N, M_i) \longrightarrow Hom_A(M, M_i)$

وذلك مهما كانت $i = 1, 2, \dots, n$ اذاً

$$\exists v_i \in Hom_A(N, M_i) : f^*(v_i) = v_i \circ f = Pr_i \circ g \quad \$$$

وهذا محقق مهما يكن $i = 1, 2, \dots, n$ والان لنبني العلاقة

$$v : N \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

$$n \in N : v(n) = (v_1(n), \dots, v_n(n))$$

والآن لنبرهن أن $v \circ f = g$ $v \in Hom_A(N, \bigoplus_{i=1}^n M_i)$

$$n_1, n_2 \in N : \varphi, \beta \in A$$

إن v تطبيق لأن :

$$n_1 = n_2$$

$\Rightarrow v_i(n_1) = v_i(n_2) : i = 1, 2, \dots, n$ ذلك مهما كانت v_i تطبيق

$$\Rightarrow (v_1(n_1), \dots, v_n(n_1)) = (v_1(n_2), \dots, v_n(n_2))$$

$$\Rightarrow v(n_1) = v(n_2)$$

إن v تشاكل لأن :

$$v(\varphi n_1 + \beta n_2) =$$

$$= (v_1(\varphi n_1 + \beta n_2), \dots, v_n(\varphi n_1 + \beta n_2))$$

مهما يكن $i = 1, 2, \dots, n$

$$\cong (\varphi v_1(n_1) + \beta v_1(n_2), \dots, \varphi v_n(n_1) + \beta v_n(n_2))$$

كون v_i تشاكل

$$= \varphi(v_1(n_1), \dots, v_n(n_1)) + \beta(v_1(n_2), \dots, v_n(n_2))$$

$$= \varphi v(n_1) + \beta v(n_2)$$

ومنه $v \in \text{Hom}_A(N, \bigoplus_{i=1}^n M_i)$ ولنبرهن أن $v \circ f = g$

لتكن $m \in M$ عندئذ :

$$v \circ f(m) = v(f(m))$$

حسب تعريف v نجد :

$$= (v_1 f(m), \dots, v_n f(m)) \underset{\text{حسب } \$}{=} Pr_1 \circ g(m), \dots, Pr_n \circ g(m)$$

$$\underset{\text{حسب قاعدة ربط } Pr_i}{=} (g(m), \dots, g(m))$$

$$= g(m) \Rightarrow v \circ f = g$$

أي أن $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ أفقي

انتهى البرهان

تنويه : لقد قمنا هنا ببناء العلاقة v لأنه لو أخذ $in_i : M_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i$ وقلنا أن

$$in_i \circ v_i \in \text{Hom}(N, \bigoplus_{i=1}^n M_i)$$

وبذلك سوف يكون لدينا مشكلة في اثبات المخطط التبديلي لأنه لا يتحقق .

ملاحظة : إن المبرهنة صحيحة من أجل المجموع المنتهي ولا يمكن التعميم من أجل المجموع غير

المنتهي

انتهت المحاضرة

يقول غاوس : إن السحر الاخاذ لهذا العلم السامي لا يمكن أن يفصح عن جماله الا لأولئك

الذين يتعمقون فيه

إعداد: لبنى الطون - احمد أبو النوت - شهد الحايك البوشي