◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄المحاضرة : الرابعة والخامسة عشرة

◄عنوان المحاضرة : المودولات الإسقاطية و المودولات الأفقية

المودولات الإسقاطية والمودولات الأفقية

تعريف : ليكن P مودول على الحلقة A عندها :

P إسقاطي $\Leftrightarrow$ لأجل كل متتالية تامة من التشاكلات المودولية :

$M \xrightarrow{g\ \text{غامر}} N \longrightarrow 0$ عندها فإن التشاكل :

$g_* : Hom_A(P,M) \longrightarrow Hom_A(P,N)$ غامر

P أفقي $\Leftrightarrow$ لأجل كل متتالية تامة من التشاكلات المودولية :

$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f\ \text{متباين}} N$ عندها فإن التشاكل :

$f^* : Hom_A(N,P) \longrightarrow Hom_A(M,P)$ غامر

مبرهنة : لتكن $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ أسرة منتهية من المودولات على الحلقة A عندها :

١) $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ إسقاطي $\Leftrightarrow$ M_i إسقاطي وذلك مهما يكن $i = 1,2,\dots\dots,n$

٢) $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ أفقي $\Leftrightarrow$ M_i أفقي وذلك مهما يكن $i = 1,2,\dots\dots,n$

البرهان:

تنويه قبل البدء إن $\prod_{i=1}^{n} M_i = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ لأن الأسرة منتهية .

١- $\Leftarrow$ بفرض $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ إسقاطي ولنثبت أن M_i اسقاطي

(سنقوم بتثبيت ال i و اثبات صحة المبرهنة من أجلها وبالتالي ستكون المبرهنة صحيحة مهما يكن $i = 1,2,\dots,n$)

لدينا $0 \longrightarrow N \xrightarrow{g \text{ غامر}} M$ متتالية تامة من التشاكلات المودولية والمطلوب اثبات أن :

$$g_* : Hom_A(M_i, M) \longrightarrow Hom_A(M_i, N) \text{ غامر}$$

ليكن $f \in Hom_A(M_i, N)$ عنصر كيفي من المستقر والمطلوب اثبات أن

$$\exists w \in Hom_A(M_i, M) \ : \ g_*(w) = g \ o \ w = f$$

$$\begin{tikzcd}
& M_i \arrow[dl, dashed, "w"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

لنأخذ التشاكل الإسقاطي Pr_i وهو تشاكل غامر .

$$Pr_i \ : \bigoplus_{i=1}^n M_i \longrightarrow M_i$$

لكن $\bigoplus_{i=1}^n M_i = \prod_{i=1}^n M_i$ كون الاسرة منتهية

اذا يوجد تشاكل in_i تشاكل الاحتواء القانوني

$$in_i \ : \ M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

ولدينا $f \ o \ Pr_i \in Hom_A(\bigoplus_{i=1}^n M_i, N)$

ومن كون $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ إسقاطي اذا من أجل كل

متتالية من الشكل $0 \longrightarrow N \xrightarrow{g \text{ غامر}} M$ تامة فإن

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^n M_i = \prod_{i=1}^n M_i \arrow[dd, "\widetilde{w}"'] \arrow[dr, shift right, "Pr_i"'] \arrow[ddr, bend left, "foPr_i"] & & \\
& M_i \arrow[ul, shift right, "in_i"'] \arrow[dl, dashed, "w"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$g_* : Hom_A(\bigoplus_{i=1}^n M_i, M) \longrightarrow Hom_A(\bigoplus_{i=1}^n M_i, N) \text{ غامر}$$

اذا

$$\exists \breve{w} \in Hom_A(\bigoplus_{i=1}^n M_i, M) \ : g_* \ (\breve{w}) = g \ o \ \breve{w} = \ f \ o \ Pr_i \qquad (*)$$

اذا

$\breve{w} \ o \ in_i \in Hom_A(M_i, M)$ ولنرمز ب w ل $\breve{w} \ o \ in_i$ إن w تشاكل لأنه تركيب تشاكلين ومنه

$w \in Hom_A(M_i, M)$ وبقي اثبات أن $g \ o \ w = f$

$$g \ o \ w = \underbrace{g \circ \breve{w} \ o \ in_i}_{\text{التجميعية محققة}} \underbrace{=}_{* \text{ حسب}} f \circ Pr_i \circ in_i = f \circ 1 = f$$

حيث : $Pr_i \circ in_i = 1$ (التطبيق المطابق). وبالتالي M_i إسقاطي مهما يكن $i = 1,2, \ldots \ldots, n$

لنبرهن الاتجاه الثاني :

$\Longrightarrow$ بفرض M_i إسقاطي مهما يكن $i = 1,2,\dots\dots,n$

ولنبرهن أن $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ إسقاطي . لدينا

$M \xrightarrow{g \text{ غامر}} N \longrightarrow 0$ متتالية تامة من التشاكلات المودولية

والمطلوب البرهان أن

$$g_* : Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, M) \longrightarrow Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, N)$$ غامر

ليكن $f \in Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, N)$ عنصر كيفي من المستقر والمطلوب اثبات أن

$$\exists v \in Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, M) \ : \ g_*(v) = g \ o \ v = f$$

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \arrow[dl, dotted, "v"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

لنأخذ تشاكل الأحتواء القانوني

$$in_i \ : \ M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$$

ولدينا $f \ o \ in_i \in Hom_A(M_i, N)$

ومن كون M_i إسقاطي مهما يكن $i = 1,2,\dots\dots,n$

اذا من أجل كل متتالية من الشكل $M \xrightarrow{g \text{ غامر}} N \longrightarrow 0$ تامة فإن

$$g_* : Hom_A(M_i, M) \longrightarrow Hom_A(M_i, N)$$ غامر

وذلك مهما كانت $i = 1,2,\dots\dots,n$ اذاً

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "v_i"'] \arrow[dr, "in_i"] \arrow[ddrr, bend left, "f \ o \ in_i"] & & \\ & & \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \arrow[dll, dotted, "v"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[rr, "g"] & & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\exists v_i \in Hom_A(M_i, M) \ : g_* \ (v_i) = g \ ov_i = \ f \ o \ in_i$$ ☺

وهذا محقق مهما يكن $i = 1,2,\dots\dots,n$ والان لنبني العلاقة

$$v \ : \ \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow M$$

$$(m_1, \dots, m_n) \in \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \ : \ v(m_1, \dots, m_n) = v_1(m_1) + \ \dots + v_n(m_n)$$

والآن لنبرهن أن $g \ o \ v = \boldsymbol{f} \ : \ v \in Hom_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, M)$

$$(m_1, \dots\dots, m_n), (m_1^1, \dots\dots, m_n^1) \in \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \ : \varphi, \beta \in A$$

إن v تطبيق لأن :

$$(m_1, \dots\dots, m_n) \underbrace{=}_{\text{المركبات المتقابلة متساوية}} (m_1^1, \dots\dots, m_n^1)$$

$$\Rightarrow m_i = m_i^1 \;:\; i = 1,2, \dots\dots, n$$ وذلك مهما كانت

$$\underbrace{\overset{\text{مهما يكن } i=1,2,\dots\dots,n}{\Rightarrow}}_{v_i \text{ تطبيق}} v_i(m_i) = v_i(m_i^1)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{لنأخذ المجموع}} v_1(m_1) + \dots\dots.+ v_n(m_n) = v_1(m_1^1) + \dots\dots.+ v_n(m_n^1)$$

$$\Rightarrow v(m_1, \dots\dots, m_n) = v(m_1^1, \dots\dots, m_n^1)$$

إن v تشاكل لأن :

$$v\big(\varphi(m_1, \dots\dots, m_n) + \beta(m_1^1, \dots\dots, m_n^1)\big)$$

$$= v\big((\varphi m_1, \dots\dots, \varphi m_n) + (\beta m_1^1, \dots\dots, \beta m_n^1)\big)$$

$$\underbrace{=}_{v \text{ حسب تعريف}} v_1(\varphi m_1 + \beta m_1^1) + \dots\dots\dots + v_n(\varphi m_n + \beta m_n^1)$$

$$\underbrace{\overset{\text{مهما يكن } i=1,2,\dots\dots,n}{=}}_{\text{كون } v_i \text{ تشاكل}} \varphi v_1(m_1) + \beta v_1(m_1^1) + \dots\dots\dots + \varphi v_n(m_n) + \beta v_n(m_n^1)$$

$$= \varphi\big(v_1(m_1) + \dots\dots + v_n(m_n)\big) + \beta\big(v_1(m_1^1) + \dots\dots + v_n(m_n^1)\big)$$

$$= \varphi v(m_1, \dots\dots, m_n) + \beta v(m_1^1, \dots\dots, m_n^1)$$

ومنه $v \in Hom_A(\bigoplus_{i=1}^n M_i, M)$ ولنبرهن أن $g \circ v = f$

لتكن $(m_1, \dots\dots, m_n) \in \bigoplus_{i=1}^n M_i$ عندئذ :

$$g \circ v(m_1, \dots\dots, m_n) = g\big(v(m_1, \dots\dots, m_n)\big)$$

حسب تعريف v نجد :

$$= g\big(v_1(m_1) + \dots\dots.+ v_n(m_n)\big) \underbrace{=}_{g \text{ تشاكل}} g\big(v_1(m_1)\big) + \dots\dots.+ g\big(v_n(m_n)\big)$$

$$= g \circ v_1(m_1) + \cdots \dots\dots..+ g \circ v_n(m_n)$$

$$\text{حسب} \ ☺ = f\circ in_1(m_1) + \ \dots\dots\dots + f\circ in_n(m_n)$$

$$= f\big(in_1(m_1)\big) + \ \dots\dots.. + f\big(in_n(m_n)\big)$$

$$\underbrace{=}_{f \text{ تشاكل}} \ f\big(in_1(m_1) + \cdots \dots.. + in_n(m_n)\big)$$

$$\underbrace{=}_{\text{حسب قاعدة ربط } in_i} \ f\big((m_1, 0, \dots.,0) + \ \dots\dots.. + (0,0, \dots\dots, m_n)\big)$$

$$= f(m_1, \dots\dots, m_n)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{g\circ v = f}$$

أي أن $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ إسقاطي

تنويه : لقد قمنا هنا ببناء العلاقة v لأنه لو أخذنا $Pr_i : \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \ \to M_i$ وقلنا أن

$$v_i \ o \ \underset{i}{Pr} \in Hom\big(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, M\big)$$

<u>وبذلك سوف يكون لدينا مشكلة فى اثبات أن المخطط تبديلى لأنه لا يتحقق .</u>

٢- $\Longleftarrow$ بفرض $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ أفقي ولنثبت أن M_i أفقي

) سنقوم بتثبيت ال i واثبات صحة المبرهنة من أجلها وبالتالي ستكون المبرهنة صحيحة مهما يكن $(\ i = 1,2, \dots, n$

لدينا $N \xrightarrow{f \text{ متباين}} M \to 0$ متتالية تامة من التشاكلات المودولية والمطلوب اثبات أن :

$f^* : Hom_A(N, M_i) \longrightarrow Hom_A(M, M_i)$ غامر

ليكن $g \in Hom_A(M, M_i)$ عنصر كيفي من المستقر والمطلوب اثبات أن

$$\exists v \in Hom_A(N, M_i) \ : \ f^*(v) = v \ o \ f = g$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dotted, "v"] \\ & M_i & \end{tikzcd}$$

لنأخذ التشاكل in_i تشاكل الاحتواء القانوني

$$in_i \ : \ M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$$

لكن $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \prod_{i=1}^{n} M_i$ كون الأسرة منتهية

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right=60, "in_i\, o\, g"'] & N \arrow[dl, dashed, "v"'] \arrow[ddl, "\breve{v}"] \\
& M_i \arrow[d, shift left, "in_i"] & \\
& \bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \prod_{i=1}^{n} M_i \arrow[u, shift left, "Pr_i"] &
\end{tikzcd}$$

اذا يوجد تشاكل Pr_i تشاكل الاسقاط القانوني

$$Pr_i \ : \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow M_i$$

ولدينا $in_i\ o\ g \in Hom_A(M, \bigoplus_{i=1}^{n} M_i)$

ومن كون $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ أفقي اذا من أجل كل متتالية من الشكل

$0 \to M \xrightarrow[]{f \text{ متباين}} N$ تامة فإن

$f^* : Hom_A(N, \bigoplus_{i=1}^{n} M_i) \longrightarrow Hom_A(M, \bigoplus_{i=1}^{n} M_i)$ غامر

اذا

$$\exists \breve{v} \in Hom_A(N, \bigoplus_{i=1}^{n} M_i) \ : \ f^*(\breve{v}) = \breve{v}\ of = in_i\ o\ g \qquad @$$

اذا

$Pr_i\ o\ \breve{v} \in Hom_A(N, M_i)$ ولنرمز ب v ل $Pr_i\ o\ \breve{v}$ إن v تشاكل لأنه تركيب تشاكلين ومنه

$v \in Hom_A(N, M_i)$ وبقي اثبات أن $v\ o\ f = g$

$$v\ o\ f = \underbrace{Pr_i\ o\ \breve{v} \circ f}_{\text{التجميعية محققة}} \underset{@\ \text{حسب}}{=} Pr_i \circ in_i\ o\ g = 1 \circ g = g$$

حيث : $Pr_i \circ in_i = 1$ (التطبيق المطابق) . وبالتالي M_i أفقي مهما يكن $i = 1,2, \dots \dots, n$

لنبرهن الاتجاه الثاني :

$\Longrightarrow$ بفرض M_i أفقي مهما يكن $i = 1,2, \dots \dots, n$ ولنبرهن أن $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ أفقي . لدينا

$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f \text{ متباين}} N$ متتالية تامة من التشاكلات المودولية والمطلوب برهان أن

$f^* : Hom_A(N, \bigoplus_{i=1}^{n} M_i) \longrightarrow Hom_A(M, \bigoplus_{i=1}^{n} M_i)$ غامر

ليكن $g \in Hom_A(M, \bigoplus_{i=1}^{n} M_i)$ عنصر كيفي من المستقر والمطلوب اثبات أن

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & N \arrow[dl, dashed, "v"] \\
& \bigoplus_{i=1}^{n} M_i &
\end{tikzcd}$$

$$\exists v \in Hom_A(N, \bigoplus_{i=1}^{n} M_i) \ : \ f^*(v) = v\ o\ f = g$$

لنأخذ تشاكل الإسقاط

$$Pr_i \ : \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow M_i$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right, "Pr_i o g"'] & N \arrow[dl, dotted, "v"'] \arrow[ddl, "v_i"] \\
& \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \arrow[d, "Pr_i"] & \\
& M_i &
\end{tikzcd}$$

ولدينا $Pr_i\ o\ g \in Hom_A(M,M_i)$ ومن كون

M_i أفقي مهما يكن $i = 1,2,\dots\dots,n$ اذا من أجل كل متتالية

من الشكل $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f\ \text{متباين}} N$ تامة فإن

$f^* : Hom_A(N,M_i) \longrightarrow Hom_A(M,M_i)$ غامر

وذلك مهما كانت $i = 1,2,\dots\dots,n$ اذاً

$$\exists v_i \in Hom_A(N,M_i)\ : f^*(v_i) = v_i\ o\ f = Pr_i\ o\ g \qquad \$$$

وهذا محقق مهما يكن $i = 1,2,\dots\dots,n$ والان لنبني العلاقة

$$v\ :\ N \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$$

$$n \in N\ :\ v(n) = \big(v_1(n),,,\dots,v_n(n)\big)$$

والآن لنبرهن أن $v\ o\ f = \boldsymbol{g}\ :\ v \in Hom_A(N,\bigoplus_{i=1}^{n} M_i)$

$$n_1,n_2 \in N\ \ : \varphi,\beta \in A$$

إن v تطبيق لأن :

$$n_1 = n_2$$

v_i تطبيق وذلك مهما كانت $i = 1,2,\dots\dots,n\ :\ \Rightarrow v_i(n_1) = v_i(n_2)$

$$\Rightarrow \big(v_1(n_1),,,\dots,v_n(n_1)\big) = \big(v_1(n_2),,,\dots,v_n(n_2)\big)$$

$$\Rightarrow v(n_1) = v(n_2)$$

إن v تشاكل لأن :

$$v(\varphi n_1 + \beta n_2) =$$

$$= \big(v_1(\varphi n_1 + \beta n_2),,,\dots,v_n(\varphi n_1 + \beta n_2)\big)$$

$$\underbrace{\overset{\text{مهما يكن } i=1,2,\dots\dots,n}{\triangleq}}_{\text{كون } v_i \text{ تشاكل}} \big(\varphi v_1(n_1) + \beta v_1(n_2),,,\dots,\varphi v_n(n_1) + \beta v_n(n_2)\big)$$

$$= \varphi\big(v_1(n_1),,,\dots,v_n(n_1)\big) + \beta\big(v_1(n_2),,,\dots,v_n(n_2)\big)$$

$$= \varphi v(n_1) + \beta v(n_2)$$

ومنه $v \in Hom_A(N,\oplus_{i=1}^{n} M_i)$ ولنبرهن أن $v \circ f = g$

لتكن $m \in M$ عندئذ :

$$v \circ f(m) = v\big(f(m)\big)$$

حسب تعريف v نجد :

$$= \big(v_1 f(m), \dots \dots, v_n f(m)\big) \underbrace{=}_{\text{حسب } \$} Pr_1\, o\, g(m), \dots \dots, Pr_n\, o\, g(m)$$

$$\underbrace{=}_{\text{حسب قاعدة ربط } Pr_i} \big(g(m)\text{المركبة الاولى ل} ,,,,,, g(m)\text{المركبة } n \text{ ل}\big)$$

$$= g(m) \Rightarrow \boldsymbol{v \circ f = g}$$

أي أن $\oplus_{i=1}^{n} M_i$ أفقي

انتهى البرهان

تنويه : لقد قمنا هنا ببناء العلاقة v لأنه لو أخذ $in_i : M_i \to \oplus_{i=1}^{n} M_i$ وقلنا أن

$$in_i\, o\, v_i \in Hom(N,\oplus_{i=1}^{n} M_i)$$

وبذلك سوف يكون لدينا مشكلة في اثبات المخطط التبديلي لأنه لا يتحقق .

ملاحظة : إن المبرهنة صحيحة من اجل المجموع المنتهي ولا يمكن التعميم من اجل المجموع غير المنتهي

انتهت المحاضرة

يقول غاوس : إن السحر الاخاذ لهذا العلم السامي لا يمكن أن يفصح عن جماله الا لأولئك الذين يتعمقون فيه

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو التوت – شهد الحايك البوشي