◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة : الحادية عشر ◄ عنوان المحاضرة : الزمر الجزئية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-الزمر الجزئية الناظمية.

٢- دراسة بعض خواصها على شكل مبرهنات.

تعريف الزمر الجزئية الناظمية: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G نقول ان H ناظمية في G إذا حققت الشروط :

$$\forall\, a \in G \quad ; \quad aH = Ha$$

(أي كل مرافق يساري = المرافق اليميني)

ينتج مباشرة من التعريف :

١) لأجل أية زمرة G فإن كلا من G و $< e >$ زمرة جزئية ناظمية في G .

٢) اذا كانت الزمرة G تبديلية ، كانت جميع زمرها ناظمية.

تمهيدية :

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G فإن الشروط الاتية متكافئة :

١) الزمرة الجزئية H ناظمية في G .

٢) $a\,H\,a^{-1} \subseteq H \quad ; \quad \forall\, a \in G$

٣) $a^{-1}H\,a \subseteq H \quad ; \quad \forall\, a \in G$

الاثبات :

$((1 \to 2))$ لنفرض أن الزمرة الجزئية H ناظمية في G عندئذ فحسب التعريف فإن :

$$\forall\, a \in G \quad ; \quad a.H = H.a$$

ليكن $y \in aHa^{-1}$ عندئذٍ: $\quad y = a.h.a^{-1} \quad : \quad h \in H$

ولما كان $ah \in aH = Ha$ ⇐ يوجد $h_0 \in H$ بحيث $ah = h_0 a$

$$\Rightarrow y = a.h.a^{-1} = h_0.a.a^{-1} = h_0 \in H$$

$$\Rightarrow a.H.a^{-1} \subseteq H$$

$((1 \leftarrow 2))$ نريد اثبات أنه $aH = Ha \;\; ; \;\; \forall\, a \in G$

ليكن $a \in G$, $x \in aH$ عندئذٍ يوجد $h_1 \in H$ بحيث :

$$x = ah_1 = ah_1e = a.h_1.a^{-1}.a \in aHa^{-1}.a \subseteq Ha \Rightarrow a.H \subseteq H.a$$

بنفس الطريقة نثبت الاحتواء المعاكس ومنه يتم المطلوب

$((3 \leftarrow 2))$ لنفرض أن $a\,H\,a^{-1} \subseteq H \;\; ; \;\; \forall\, a \in G$

ولما كان $a^{-1} \in G$ فإن $a^{-1}\,H.(a^{-1})^{-1} \subseteq H$

فإن $a^{-1}\,H.a \subseteq H$

$((1 \leftarrow 3))$ لنفرض أن $a^{-1}\,H\,a \subseteq H \;\; ; \;\; \forall\, a \in G$

لإثبات أن H زمرة جزئية ناظمية في G يجب إثبات أن :

$$\forall\, a \in G \;\; ; \;\; a.H = H.a$$

ليكن $x \in aH$ عندئذ يوجد $h \in H$ فإن $x = ah$

$$x = a.h.\underbrace{a^{-1}.a}_{\text{محايد}} \;\; (\text{ضربنا } a.h \text{ بالمحايد})$$

$$= (a.h.a^{-1}).a = \underbrace{((a^{-1})^{-1}.h.a^{-1})}_{\in H(\text{حسب}3)}.a \in Ha$$

$$\Longrightarrow aH \subseteq Ha$$

لنثبت الاحتواء المعاكس :

ليكن $y \in Ha$ عندئذ $y = h_1a$ حيث $h_1 \in \mathrm{H}$ ومنه :

$$y = h_1a = \underbrace{a.a^{-1}}_{\text{محايد}}.h_1.a = a.(a^{-1}.h_1.a) \in aH$$

$$\Longrightarrow Ha \subseteq aH$$

ومن الاحتواءين نجد أن $Ha = aH$ ومنه الزمرة الجزئية ناظمية في G

تمرين:

لأجل أي زمرة G فإن: $Z(G) = \{a : a \in G \ , \ ax = xa \ , \ \forall x \in G\}$

ان هذا المركز زمرة جزئية ناظمية في G

الحل:

وجدنا سابقاً ان $Z(G)$ زمرة جزئية في G ولنبرهن

$$\forall a \in G \ ; a.Z(G).a^{-1} \subseteq Z(G)$$

ليكن $y \in a.Z(G).a^{-1}$ عندئذ يوجد $b \in Z(G)$ بحيث:

$$y = a.b.a^{-1} \Rightarrow b.a.a^{-1} = b \in Z(G)$$

$$\Rightarrow a.Z(G).a^{-1} \subseteq Z(G)$$

دراسة خواص الزمرة الناظمية:

مبرهنة: لتكن G زمرة فإن القضايا التالية صحيحة :

١) تقاطع أي أسرة من الزمر الجزئية الناظمية في G هو زمرة جزئية ناظمية في G .
٢) لتكن H,k زمرة جزئية في G بحيث $H \subseteq k$ إذا كانت H ناظمية في G عندئذ H تكون ناظمية في K .
٣) اذا كانت H زمرة جزئية في G وتحقق $(G:H) = 2$ عندئذ تكون الزمرة الجزئية H ناظمية في G .

الاثبات :

١) لتكن $\underbrace{\{H_i\}}_{i\in I}$ ((حيث I مجموعة ما و قابلة للعد)) أسرة من الزمر الجزئية الناظمية في G ولنفرض ان $D = \cap_{i\in I} H_i$ وجدنا سابقاً ان D زمرة جزئية في G لنبرهن على انها ناظمية في G

$$\forall a \in G \ , \quad a.D.a^{-1} \subseteq D$$

ليكن $y \in a.D.a^{-1}$ حيث $a \in G$ عندئذٍ: $d \in D = \cap_{i\in I} H_i$: $y = a.d.a^{-1}$

ومنه $\forall i \in I \ ; d \in H_i$ ولما كانت H_i ناظمية في G فإن العنصر

$$y = a.d.a^{-1} \in a.H_i a^{-1} \subseteq H_i \quad : \forall i \in I$$

نجد ان D ناظمية في G $\qquad y \in \cap_{i\in I} H_i = D$

٢) لنفرض ان $H \subseteq K$ وان H ناظمية في G عندئذٍ: $\forall a \in G ; a.H.a^{-1} \subseteq H$

لنثبت ان H ناظمية في K $\forall k \in K ; k \in G \ , \ k.H.k^{-1} \subseteq H$

وهذا يبين ان H ناظمية في K

٣) لتكن H زمرة جزئية في G ولنفرض أن $(G:H) = 2$ أي أن الدليل "2" يدل على عدد المرافقات وبالتالي يوجد مرافقتين للزمرة H فقط هما H و aH مولدة بعنصر مختلف عن المحايد أي أن $a \epsilon G , a \neq e$: أي

$\{eH, aH\}$ المرافقتين اليساريتين الوحيدتين في G

والمرافقات تشكل تجزئة : $e \neq a \in G$

$$\Rightarrow G = H \cup a.H$$
$$\Rightarrow aH = G \backslash H$$

وايضاً لدينا

$$G = H \cup H.a$$
$$\Rightarrow H.a = G \backslash H$$
$$\Rightarrow a.H = H.a$$

عندئذٍ H ناظمية في G

مبرهنة. لتكن G زمرة و A, B زمر جزئية في G فإن الشروط الاتية متكافئة :

١) الجداء $A.B$ هو زمرة جزئية في G .

٢) $A.B = < A \cup B >$

٣) $A.B = B.A$ (A.B زمرة مولدة بالاجتماع و Aو B تبديلي)

((التبديلية لجداء المجموعات و ليس لجداء العناصر))

الاثبات :

((1 ← 2)) لنفرض أن الجداء $A.B$ زمرة جزئية في G وليكن $a \in AUB$ عندئذ :

١- اذا كان $a \in A$ فإن $a = a.e \in A.B$

٢- اذا كان $b \in B$فإن $a = e.a \in A.B$

في كل الأحوال العنصر a موجود في الجداء $A.B$

$$\Rightarrow AUB \subseteq A.B$$
$$AUB \subseteq < AUB >$$
$$\Rightarrow < AUB > \subseteq A.B$$

ليكن $y = a.b \ , \ y \in A.B$

حيث $b \in B \ , \ a \in A$ ومنه: $a, b \ \in AUB \subseteq < AUB >$

(زمرة مغلقة اذا حوّت عنصرين تحوي جداءهما)

$$y = a.b \in < AUB >$$
$$\Rightarrow A.B \subseteq < AUB >$$

من الاحتوائين نجد$\Rightarrow A.B = < AUB >$

((2 ⟵ 3)) لنفرض أن $A.B = < A \cup B >$ عندئذٍ $A.B$ زمرة جزئية في G

ليكن $x \in A.B$ عندئذٍ $x^{-1} \in A.B$ وبالتالي حسب تعريف الجداء:

$$x^{-1} = a.b : a \in A \ , b \in B$$

$$, x = (x^{-1})^{-1} = (a.b)^{-1} = b^{-1}.a^{-1} \in B.A$$

$$\Rightarrow A.B \subseteq B.A$$

ملاحظة: بما ان $A.B = < A \cup B >$ فهذا يعني ان $A.B$ زمرة ولكن $B.A$ ليست بالضرورة زمرة بل مجموعة.

لنثبت الاحتواء المعاكس :

ليكن $y \in B.A$ عندئذ $y = b_1.a_1$ حيث $a_1 \in A \ , \ b_1 \in B$ ومنه

$$a_1, b_1 \in A \cup B \ \subseteq < A \cup B > = A.B$$

ومنه فإن $A.B \in y = b_1.a_1$ وبالتالي $B.A \subseteq A.B$

ومن الاحتواءين نجد : $A.B = B.A$.

((3 ← 1)) لنفرض ان $A.B = B.A$ نبرهن أن $A.B$ زمرة جزئية في G

بما أن A, B ليستا خاليتين فالجداء ليس خالي $e = \overset{\in A}{\widetilde{e}} . \overset{\in B}{\widetilde{e}} \in A.B$

$$\Rightarrow \emptyset \neq A.B \in G$$

ليكن $x, y \in A.B$ حيث :

$$x = a_0.b_0$$
$$y = a_2.b_2$$

حيث : $A \ \in a_0 \ , a_2$ و $b_0, b_2 \in B$

ومنه فإن $x.y^{-1} = a_0.b_0 \ (a_2.b_2)^{-1} = a_0.\underbrace{(b_0.b_2{}^{-1}a_2{}^{-1})}_{\in B} = a_0(b_0.b_2^{-1})a_2^{-1}$

لنأخذ $b_0.b_2{}^{-1}.a_2{}^{-1} \in B.A = A.B$ نفرض للسهولة: $(b_0.b_2{}^{-1})a_2{}^{-1} = a_3.b_3$ حيث $a_3 \in A$ و $b_3 \in B$

$$\Rightarrow x.y^{-1} = a_0.a_3.b_3 \in A.B$$

وهذا يبين أن $A.B$ زمرة جزئية في G .

مبرهنة. لتكن G زمرة و A,B زمر جزئية في G إذا كانت B ناظمية في G عندئذ :

١) $A.B$ زمرة جزئية في G

٢) $A.B = < A \cup B >$

٣) $A.B = B.A$

الاثبات :

١) لنفرض ان الزمرة الجزئية B ناظمية في G : $e = e.e \in A.B$

$$\Rightarrow \emptyset \neq A.B \subseteq G$$

ليكن $x,y \in A.B$ عندئذٍ:

$$x = a.b \quad ; \quad a, a_1 \in A$$
$$y = a_1.b_1 \quad ; \quad b, b_1 \in A$$

ومنه
$$x.y^{-1} = a.b(a_1.b_1)^{-1} = a.b.b_1^{-1}.a_1^{-1}$$
$$= \underbrace{a.a_1^{-1}}_{\in A}.\underbrace{a_1(b.b_1^{-1})a^{-1}}_{\in B} \in A.B$$

ومنه فإن $A.B$ زمرة جزئية في G .

(٢) و(٣) ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة ومن اعتماداً على (١).

تمهيدية. لتكن G زمرة و A,B زمر جزئية ناظمية في G عندئذٍ $A.B$ زمرة جزئية ناظمية في G .

البرهان:

بما ان B ناظمية في G فإن $A.B$ زمرة جزئية في G ولنبرهن على ان

$$\forall g \in G \quad ; \quad g.(A.B).g^{-1} \subseteq A.B$$

ليكن $x \in g.(A.B).g^{-1}$ عندئذ : $x = g(a.b)g^{-1}$ حيث $a \in A\ ,\ b \in B$

$$\Rightarrow x = g(a.b)g^{-1} = \underbrace{(g.a.g^{-1})}_{\in A}.\underbrace{(g.b.g^{-1})}_{\in B}$$

$$\Rightarrow x \in A.B$$

انتهت المحاضرة

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج