◄ دكتورة المادة: رشا بعاج

◄ المحاضرة: الخامسة والسادسة

حل تمارين الوظيفة (التمرين الاول) :

$f(x) = x^3 - 2x + 2$ حيث $x \in I = [a, b] = [-2,1]$

- الطلب الاول : **الطريقة الأولى (طريقة الجدول) :**

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	c	$f(c)$	$\frac{b-a}{2}$
1	-2	-1	-2	3	$-1,5$	1,625	0,5
2	-2	$-1,5$	-2	1,625	$-1,75$	0,140625	0,25

ومنه الجذر التقريبي المطلوب هو $(-1,75)$ وهو آخر جذر حصلنا عليه حيث حددنا عدد التكرارات المطلوبة.

طريقة أخرى:

$$f(a) = -2 \qquad f(b) = 3 \qquad f(a).f(b) < 0$$

إذا يوجد جذر ضمن المجال $c = \frac{a+b}{2} = -1,5$

$$f(c) = 1,625 > \varepsilon = 0,0001 \qquad \to \qquad f(a).f(c) < 0$$

إذا المجال الجديد $[-2 , -1,5]$ ونكرر العملية إلى أن يصبح : $|f(c)| < \varepsilon$ عندها c التي تحقق الشرط السابق هي الجذر التقريبي المطلوب .

- الطلب الثاني: لم نأخذ حله بعد
- الطلب الثالث:

$$\varepsilon = 0,0001 \quad => \quad n > \frac{\log(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\log(2)} \quad => \quad n > \frac{\log(\frac{-1+2}{0,0001})}{\log(2)}$$

$$n > \frac{4}{0,3010299957} \qquad => \qquad n > 13,28771238.10^{-9}$$

بما أن n هي أول عدد صحيح بعد العدد الموجود على يسار الفاصلة (يعني بعد 13) ومنه :

$$14 > 13{,}28771238.10^{-9} \qquad => \qquad n = 14$$

(التمرين الثاني):

- الطلب الاول: حدد المجال الذي يحقق جذر المعادلة $f(x) = e^{x} + x = 0$

$$[-1{,}5\,,-1]\,,[-0{,}75\,,-0{,}5]$$

- الشرط كي يحقق المجال جذر للمعادلة : $f(a).\ f(b) < 0$

$$[-1{,}5\,,-1]:\ \ f(a).f(b) < 0$$

$$f(a') = -1{,}27686984 \qquad\qquad f(b') = -0{,}6321205588$$

$f(a').f(b') < 0$ اذا هو ليس جذرا للمعادلة

على المجال $[-0{,}75\,,-0{,}5]$

$$f(a) = -0{,}277633447 \qquad f(b) = 0{,}1065306597 \quad => \quad f(a).f(b) < 0$$

وبالتالي المجال $[-0{,}75\,,-0{,}5]$ هو جذر للمعادلة $e^{x} + x = 0$

عندما $n = 1$: $E_{max} \leq -0{,}125 \qquad E_{max} \leq \frac{(-0{,}75)-(-0{,}5)}{2^{1}} \qquad E_{max} \leq \frac{b-a}{2^{n}}$

عندما $n = 2$: $E_{max} \leq -0{,}0625 \qquad E_{max} \leq \frac{((-1)-(-1{,}5))}{2^{2}} \qquad E_{max} \leq \frac{b-a}{2^{2}}$

- الطلب الثاني:

$$\varepsilon = 10^{-10} \qquad n > \frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log(2)}$$

$$\frac{\log(2500000000)}{0{,}3010299957} = \frac{9{,}397940009}{0{,}3010299957} = 31{,}21928095 < n$$

n هي أول عدد صحيح يلي 31 (الموجود على يسار الفاصلة) <= $31{,}21928095 < 32$

<= $n = 32$

لنكمل الآن الفصل الثاني (حل المعادلات غير الخطية) الذي بدأنا به في المحاضرة السابقة :

مزايا طريقة تنصيف المجال:

١) التقارب مضمون

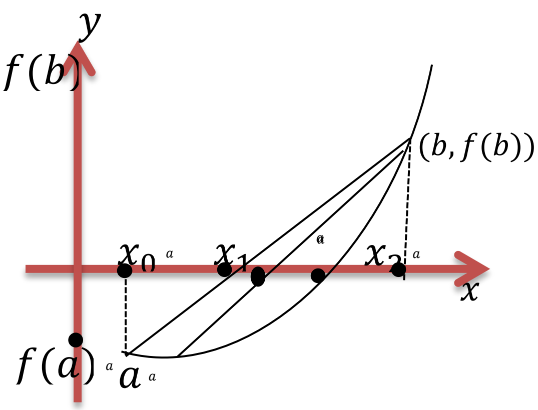
٢) حدّ الخطأ المعطى يتناقص بمقدار النصف في كل تكرار.

٣) التّقارب بطيء بسبب الاعتماد فقط على قيمة a, b

لنبدأ: <<الطّرق المجاليّة>>

١) طريقة تنصيف المجال:

٢) طريقة الوضع الخاطئ:



تعتمد هذه الطريقة على اختيار نقطة بديلة عن المنتصف التي جرى اختيارها في طريقة تنصيف المجال حيث تختار هذه الطريقة نقطة تقاطع النقطة الواصلة بين النقطتين $(a, f(a))$ و$(b, f(b))$ مع المحور ox وتحسب هذه النقطة من العلاقة الآتية:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

إذا كان $f(x_2).f(x_1) < 0$ نعيد العملية السابقة وبذلك يكون المجال أصبح عندنا هو $[x_1, x_2]$ أي نقوم بإعادة تحديد المتغيرات الابتدائية $x_1 = x_1,\ x_0 = x_2$

ونطبّق القانون مرّة أخرى $x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$

- **خوارزميّة الطريقة (طريقة معيار التوقف المرتبط بعدد التكرارات) :**

١) إدخال x_0 , x_1 معيار التوقف (ε أو m)

٢) تحديد القيم الابتدائيّة : $\varepsilon > 0$ ، من نص السؤال $= \varepsilon$
عدد التكرارات m حيث $m > 0$ $f_1 = f(x_1)$ $f_0 = f(x_0)$ $i = 0$

٣) طالما أنّ $i < m$ كرر

أ- من القانون نحسب x_2 $x_2 = x_1 - \left[\frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0}\right] . f_1$

ب- حساب $f_2 = f(x_2)$

ت- إذا كان $f_2 = 0$ عندئذ هي الجذر التقريبي المطلوب.......... توقف.

ث- إذا كان $f_1 . f_2 < 0$ عندئذ:

$x_0 = x_2$ أي $f_0 = f_2$

وإلا $x_1 = x_2$ أي $f_1 = f_2$

ج- $i = i + 1$

٤) إذا كان $m = i$ عندئذ x_2 هي الجذر التقريبي للدالة

٥) توقّف.

مثال: لتكن لدينا الدالة $f(x) = x^2 - 3$ أوجد الجذر التقريبي للدالة بطريقة الوضع الخاطئ ضمن المجال $[1,2]$ من أجل $\varepsilon(f) = 0.01$

i	x_0	x_1	$f(x_0)$	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$
1	1	2	-2	1	1.66667	-0.22221
2	1.66667	2	-0.22221	1	1.72727	-0.0164
3	1.72727	2	-0.0164	1	1.7317	0.001

$x_2 = 1,7317$ عندئذ $f(x_2) = 0,001 < \varepsilon(f)$ الجذر التقريبي المطلوب

إذا كانت الدالة مقعرة في بعض الدوال تتقارب طريقة تنصيف المجال اسرع من الوضع الخاطئ

ملاحظة: ١- الفرق بين طريقة تنصيف المجال وطريقة الوضع الخاطئ أن طرفي المجال في طريقة التنصيف يمكن ان يتغيرا أما طريقة الوضع الخاطئ يبقى فيها أحد الطرفين ثابتا إذا كانت الدالة مقعرة.

٢- تتقارب طريقة تنصيف المجال في بعض الحالات بشكل أسرع من طريقة الوضع الخاطئ.

انتهت المحاضرة الخامسة

لنبدأ الآن بالمحاضرة السادسة:

مراجعة للمحاضرة السابقة وحل تمرين الوظيفة:

حل المعادلات غير الخطية

الطرق المجالية : ١- طريقة تنصيف المجال ٢- طريقة الوضع الخاطئ

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0} f_1$$

$$\lambda = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \qquad E_{max} = \left|\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right| |x_n - x_{n-1}| \quad < \varepsilon$$

ملاحظة: الخطأ الأعظمي لا يحسب إلا بعد إيجاد ثلاث تكرارات.

حل الوظيفة : أوجد جذر المعادلة : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$

بالدقة $\varepsilon = 0.005$ على المجال $[1,2]$

i	x_0	x_1	f_0	f_1	x_2	f_2	الخطأ
1	1	2	−1	9	1,1	−0,549	....
2	1,1	2	−0,549	9	1,151743638	−0,2744007202	....
3	1,151743638	2	−0,2744007202	9	1,176841405	−0,1307391567	0,0236398283
4	1,176841405	2	−0,1307391567	9	1,88627862	−0,06087473491	0,7354554286
5	1,188627862	2	−0,06087473491	9	1,887042648	−7,180358654	0.00000082 37066048

إذا: $E_{max} = \left|\frac{\lambda}{\lambda-1}\right| |x_n - x_{n-1}| = 0,0000008237066048 < \varepsilon = 0,005$

إذا الجذر التقريبي المطلوب هو $x_2 = 1.887042648$ على المجال $[1,2]$

ملاحظة : في الامتحان يجب كتابة الجدول مع القانون $x_2 = x_1 - \left[\frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0}\right] . f_1$

انتهت المحاضرة السادسة

تصحيح الأخطاء الواردة:

المحاضرة الاولى: الصفحة (٣) السطر قبل الأخير

- لا يمكن استخدام هذا العدد دون أن نجري عليه التدوير (لا يمكن الاقتطاع دون التدوير)

المحاضرة الثانية : الصفحة الأولى سطر (٦)

بالنسبة لرقمين عشريين $3{,}14 \leftarrow 2(d.c)$

- سطر (٨) : بالنسبة لثلاث أرقام عشرية $3{,}142 \leftarrow 3(d.c)$
- صفحة (٤): سطر(٦)

$$|\max f^{n+1}(\theta)| = |e^3| = 20{,}08553692$$

- صفحة (٦): سطر (١٢)

$$\sin(0{,}5\,x) = 0{,}5\,x - \frac{(0{,}5x)^3}{3!} + \frac{(0{,}5\,x)^5}{5!} \dots\dots\dots.$$

- المحاضرة الثالثة: صفحة (٢) السطر قبل الأخير نحذفه نضع فقط :

نحسب منه معيار مرض الدالة $E_{(f)} = |f(x_1) - f(x_2)| = |\Delta f| \Longleftarrow$

حيث: $f' = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Longrightarrow \Delta f = f'.\Delta x \dots\dots\dots..$ ♥

- صفحة (٣) سطر (٥)

حيث $\frac{\Delta x}{x}$ تغير نسبي لـx أي هي $R_{(x)}$ ومنه:

- سطر (١٧): التعداد الخامس :

٥)- تكون الدالة مريضة من أجل قيمة محددة للمتغير وليس من أجل جميع القيم وعادة يحسب العدد الشرطي من أجل قيمة محددة للمتغير.

نعتذر عن ورود الأخطاء

جل من لا يخطئ ^ - ^

إعداد: راما جوهر & هديل سعيد & علا الدالاتي