نظري

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

◄ المحاضرة: الحادية عشرة

◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى.

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى وغير المحلولة بالنسبة للمشتق y'.

2- بعض أشكال للمعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى.

3- بعض الأمثلة لدعم ما سبق.

4- تصحيح للأخطاء في أخر صفحة.

المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى وغير المحلولة بالنسبة للمشتق y'

تسمى المعادلة من المرتبة الأولى التي تحوي المشتق y' بالمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى و غير المحلولة بالنسبة للمشتق y' و الشكل العام لها:

$$F(x, y, y') = 0 \dots (1)$$

ونقول أنّ المعادلة: $\Phi(x, y) = 0$ تعرف حلاً ضمنياً للمعادلة التفاضلية إذا عرفت هذه المعادلة y كذلك ضمنية للمتحول x .

وكانت هذه الدالة حلاً للمعادلة (1) وكذلك نقول أنّ:

$$y = \varphi(t), x = \gamma(t)$$

تمثلان حلاً وسيطياً للمعادلة (1).

نأخذ المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$y'^n + A_1(x, y)y'^{n-1} + A_2(x, y)y'^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(x, y)y' + A_n(x, y) = 0 \dots (2)$$

يمكن تفريق المعادلة هذه إلى عوامل من الدرجة الأولى في y' على الشكل التالي:

$$[y'-f_1(x,y)].[y'-f_2(x,y)].\dots\ .[y'-f_n(x,y)]=0\ \dots(3)$$

حيث أنّ: $f_1,f_2,\dots,f_n$ دوال مستمرة بالنسبة للمتغيرين x,y

بالتالي نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة (n) .

$$y'-f_k(x,y)=0;k=1,\dots,m\quad\dots(4)$$

وبالتالي من أجل الحصول على الحل العام للمعادلة (1) يجب إيجاد التكامل العام (الحل العام) لكل معادلة تفاضلية من المعادلات السابقة (4) فنحصل على n تكامل (حل) من الشكل التالي:

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,c_1)=0\\\varphi_2(x,y,c_2)=0\\\varphi_3(x,y,c_3)=0\end{cases}$$

حيث $c_1,c_2,\dots,c_n$ ثابت التكامل.

وبالتالي يكون الحل العام المطلوب:

$$F(x,y,c)=\varphi_1(x,y,c_1).\varphi_2(x,y,c_2).\dots\ .\varphi_n(x,y,c_n)=0$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y^2y'^2+xyy'-2x^2=0\ \dots(1)$$

الحل

$$a=y^2\ ,\qquad b=xy\ ,\ \ c=-2x^2$$

$$\Delta=b^2-4ac=x^2y^2-4\,(y^2)(-2x^2)=9x^2y^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=|3xy|$$

$$y_1'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-xy+3xy}{2y^2}=\frac{x}{y}$$

$$y_2'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-xy-3xy}{2y^2}=\frac{2x}{y}$$

$$\left(y'-\frac{x}{y}\right)\left(y'+\frac{2x}{y}\right)=0\ ...\ (*)$$

الأن نوجد تكامل ما داخل الأقواس لكي نستطيع إيجاد الحل العام للمعادلة(*)

$$:y'-\frac{x}{y}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\Rightarrow y.dy=x.dx\Rightarrow\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+c_1\ ...\ (1)$$

$$:y'+\frac{2x}{y}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}\Rightarrow y.dy=-2x.dx\Rightarrow\frac{y^2}{2}=-x^2+c_2\ ...\ (2)$$

نعوض (1) و(2) في $(*)$ فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$\left(\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}-c_1\right)\left(\frac{y^2}{2}+x^2-c_2\right)=0$$

_ لنأخذ شكل آخر للمعادلة التفاضلية ونأخذها من الشكل:

$$F(y')=0$$

نفرض أنّ لهذه المعادلة عدد منته أو غير منته من الجذور الحقيقية:

$$y'=l_i;i=1,\dots,n$$

حيث l_i عدد حقيقي عندئذٍ يكون: $F(l_i)=0;i=1,\dots,n$ وبمكاملة العلاقة $y'=l_i$ نجد أنّ:

$$y=l_ix+c\to l_i=\frac{y-c}{x}$$

وبتعويض l_i في العلاقة $F(l_i)$ نجد:

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0$$

و هو الحل العام المطلوب.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'^3-y'^2+y'-1=0$$

الحل

نعوض قيمة $y' = \frac{y-c}{x} = l_i$ في المعادلة:

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^3 - \left(\frac{y-c}{x}\right)^2 + \left(\frac{y-c}{x}\right) - 1 = 0$$

وهو الحل العام المطلوب (يكون هذا الحل ضمني أي أن y تابعة ل x).

أما حتى يكون الحل وسيطيا نأخذ المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$F(y, y') = 0 \ldots (1)$$

نفرض هذه المعادلة غير قابلة للحل بالنسبة للمشتق y' عندئذٍ يمكن تمثيلها وسيطيا بالشكل:

$$y = \varphi(t) \;\rightarrow\; dy = \varphi'(t)dt \quad , y' = \Psi(t)$$

باستخدام العلاقة الأساسية $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$dy = y'.dx \Rightarrow \varphi'(t).dt = \Psi(t).dx \rightarrow dx = \frac{\varphi'(t)}{\Psi(t)}.dt$$

بالمكاملة نجد أنّ:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\Psi(t)} dt + c$$

ومنه الحل العام يكون:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\Psi(t)} dt + c \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

وإذا تخلصنا من الزمن t في الحل نحصل على الحل ديكارتياً.

المعادلة ذات الشكل:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \ldots (1)$$

يكون الحل العام لها: $\phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \ldots (2)$

وبحالة خاصة: $F\left(x, y^{(n)}\right) = 0 \ldots (3)$

1- يمكن الكتابة بالشكل: $y^{(n)} = f(x) \ldots (4)$

والحل العام لها بإجراء عدة تكاملات.

2- إذا كان y حل خاص لها نجري التحويل: $y = y_1 + z \Rightarrow z^{(n)} = 0$

$$z = P_{n-1}(x) = c_{n-1}.x^{n-1} + c_{n-2}.x^{n-2} + \cdots + c_1.x + c_0$$

أن الحل الخاص: $y^{(n)} = f(x)$

$$y_1 = \int dx \int dx \ldots \int f(x).dx$$

مثال بسيط:

$$y = e^x$$

الحل الخاص لها: $y_1 = e^x$

$$y = y_1 + P_{n-1}(x)$$

$$y = e^x + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نص الله و ياسين الحُلبي و رهف النقشي

تصحيح خطأ في المحاضرة 6:

كانت :ملاحظة: تسمى طريقة تحويل الثوابت معادلة برنولي

تصبح: ملاحظة: تسمى طريقة تحويل الثوابت بطرقة برنولي

و قد طبقناها في التمرين $y' + y\, tanx = \frac{1}{cosx}$

كن كالعطر تلفت الانتباه من غير ضجيج

#ساعد غيرك