◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: الثالثة عشرة   عنوان المحاضرة: الحركة المستوية

بداية أصدقائي سنورد مراجعة للحركات التي درسناها سابقا وبعدها سنبدأ بدراسة الحركة المستوية ..

الحركة الانسحابية	الحركة الدورانية حول محور ثابت
لها **ثلاث** درجات حرية يتعين موضعها بالمعادلة : $\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{oM}$ $\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \vec{C}$ الثابت الفراغ $\ni o_1$; والسرعة : $\vec{v}(M) = \vec{v}(o)$ والتسارع : $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(o)$	لها درجة حرية **واحدة** السرعة : $\vec{\omega}$ شعاع الدوران ; $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$ $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{mM}$ حيث m المسقط القائم ل M على محور الدوران Δ التسارع : $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2 \overrightarrow{mM}$ حيث $\vec{\varepsilon}$ شعاع التسارع الزاوي
الحركة اللولبية	**الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة**
لها درجة حرية **واحدة** لدينا b الخطوة المختزلة للولب و $\vec{\omega}$ شعاع الدوران $\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{oM}$ $\overrightarrow{o_1M} = s\overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{oM}$ $\overrightarrow{o_1M} = b\theta\overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{oM}$ $\vec{v}(M) = b\theta'\overrightarrow{k_1} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$ $\vec{\Gamma}(M) = b\theta''\overrightarrow{k_1} + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2 \overrightarrow{mM}$	لها **ثلاث** درجات حرية وثلاث وسطاء ψ , θ , φ $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$ حيث $\vec{\omega}$ شعاع الدوران الآني و o نقطة ثابتة شعاع الدوران في هذه الحركة : $\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$ في جملة متماسكة : $\vec{\omega}(p,q,r)$ $\vec{\varepsilon}(p',q',r')$ في جملة ثابتة : $\vec{\omega}(p_1,q_1,r_1)$ $\vec{\varepsilon}(p_1',q_1',r_1')$ $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2 \overrightarrow{mM}$ يكون محوردوران في هذه الحركة آني و $\overrightarrow{oM} \parallel \vec{\omega}$

الحركة العامة	الحركة المستوية
لها **ست** درجات من الحرية وسطائها : $x_0\,,y_0\,,z_0$ $\varphi\ \ ,\theta\,,\psi$ حيث o قطب الحركة $\overrightarrow{o_1M}=\overrightarrow{o_1o}+\overrightarrow{oM}$ $\quad=(x_0,y_0,z_0)+\overrightarrow{oM}$ $\vec{v}(M)=\vec{v}(o)+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM}$ $\vec{\Gamma}(M)=\vec{\Gamma}(o)+\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{oM}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)$ $\vec{\Gamma}(M)=\vec{\Gamma}(o)+\vec{\Gamma_0}(M)$ حيث محور الفتل في هذه الحركة آني و $\vec{v}(M)\parallel\vec{\omega}$	سندرسها في هذه المحاضرة ..

إن قوانين الحركة الدورانية حول محور ثابت هي ذاتها في الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة
والآن لنبدأ بدراسة الحركة المستوية ..

الحركة المستوية

تعريفها

هي حركة جسم صلب S بحيث تبقى كل نقطة منه في مستو واحد يوازي مستوي ثابت في الفراغ ندعو هذا المستوي الثابت **بالمستوي الأساسي للحركة** نرمز له بالرمز (π)

النظرية الأساسية

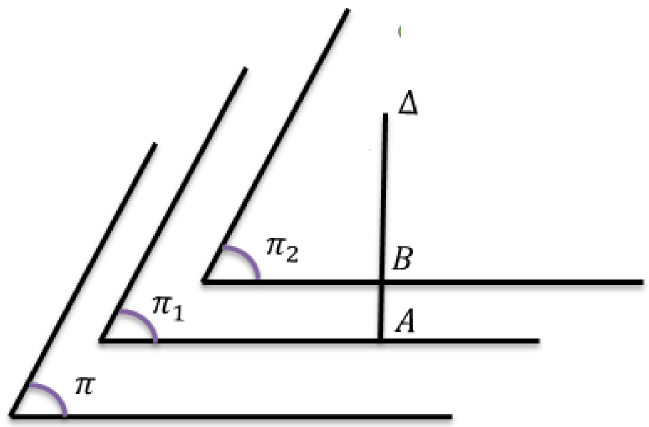
إذا تحرك جسم صلب S بحركة مستوية فإن أي مستقيم يعامد المستوي الأساسي للحركة ومتماسك مع الجسم سوف يتحرك بحركة انسحابية .

" البرهان "

ليكن Δ مستقيماً متماسكاً من الجسم الصلب S وَ يعامد المستوي الاساسي للحركة (π) ولتكن $A\,,B\ \in\Delta$ عندئذ يكون $A\,,B\ \in S$ ، وبما أن حركة المستقيم هي حركة مستوية فإن A تقع في مستو ثابت $(\pi_1$ يوازي $\pi)$ وَ B تبقى في مستو ثابت $(\pi_2$ يوازي $\pi)$ ، حيث $|\overrightarrow{AB}|$ هو البعد بين (π_1) و (π_2) ، وحسب الفرض فإن $\Delta\perp\pi$ وبالتالي فإن $\overrightarrow{AB}\perp\pi$ (لان طول المستقيم ثابت) فإن البعد بينهما ثابتاً

$$|\overrightarrow{AB}|=c\qquad\dots(1)$$

لأن البعد بين أي نقطتين من جسم صلب يبقى ثابتاً



ومنه $\pi \parallel \pi_1 \parallel \pi_2$ أيضا $\pi_1 \perp \Delta$

ومنه منحى $(\overrightarrow{AB})$ ثابت .... (2)

ومنه من (1) و (2) نجد : $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$

بالاشتقاق : $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{0}$

وبفرض o نقطة ثابتة في الفراغ فإن :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Ao} + \overrightarrow{oB} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB}$$

$$\frac{d(\overrightarrow{oB} - \overrightarrow{oA})}{dt} \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{oB}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{oA}}{dt} = 0$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(\mathrm{B}) - \vec{v}(A) = 0 \Longrightarrow \vec{v}(A) = \vec{v}(B)$$

وبالتالي المستقيم Δ فالحركة انسحابية .

نتائج :

لو أخذنا أي مستقيم يعامد المستوي الأساسي (π) فإن لنقاطه كلها نفس السرعة ونفس التسارع فبمعرفة سرعة أي نقطة من المستوي (π) نستطيع معرفة سرع جميع النقاط الواقعة على المستقيم المقام من هذه النقطة ويعامد المستوي (π) .

بدراسة حركة جسم صلب يتحرك بحركة مستوية **يكفي** دراسة حركة مستوي واحد يقع في المستوي الأساسي للحركة .

وتعاد الحركة المستوية إلى دراسة حركة نقاط مستوي يقع داخل المستوي الأساسي للحركة .

تعيين درجات حرية الجسم

نحتاج إلى ثلاث نقاط داخل المستوي (π) كل نقطة منه تتعين بوسيطين إذا يوجد ستة وسطاء للحركة غير مستقلة, مرتبطة بثلاث علاقات (علاقات البعد) وبالتالي عدد الوسطاء المستقلة هي $6 - 3 = 3$ وبالتالي يوجد ثلاث معادلات للحركة فنحتاج إلى قطب للحركة وهو يتعين بوسيطين وزاوية واحدة من زوايا أولر ولتكن (θ) وذلك لأن الحركة تتم في المستوي وشعاع الدوران يحمل على المستقيم العامودي على المستوي (π)

وبالتالي وسطاء الحركة هم عبارة عن قطب للحركة $o(x_0, y_0)$ وزاوية دوران واحدة (θ)

تعيين الزاوية (θ)

نختار (θ) هي زاوية الدوران التي يصنعها مستقيم متماسك من الجسم المتحرك مع مستقيم ثابت في المستوي الثابت .

تعيين الموضع والسرعة والتسارع

لتكن M نقطة ما من الجسم الصلب S عندئذٍ تعطى علاقة شعاع الموضع بالنسبة لنقطة O_1 في المستوي الثابت بالشكل : $\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{oM}$

حيث $o(x_0, y_0)$ هي قطب الحركة ، إن الشعاع $\overrightarrow{o_1o}$ يتعين في المستوي بدلالة وسيطين مستقلين

وأما الشعاع $\overrightarrow{oM}$ فطوله ثابت لأن $o, M \in S$ ولكنه يتعين بواسطة الزاوية θ

وباشتقاق علاقة شعاع الموضع نحصل على السرعة :

$$\forall M \in s : \vec{v}(M) = \underbrace{\vec{v}(o)}_{\text{سرعة اقطب}} + \underbrace{\vec{\omega}}_{\text{شعاع الدوران الآني}} \wedge \overrightarrow{oM}$$

علاقة السرعة هي العلاقة المعطاة في الحركة العامة للجسم الصلب لكنها مقصورة على المستوي ويمكن الاختلاف أن شعاع الدوران $\vec{\omega}$ هنا يملك منحى ثابت فهو يعامد مستوي الحركة ، أي أن $\vec{\omega}$ عامودي دوماً على المستوي (π) ، وايضاً لا يتغير من نقطة إلى اخرى ولا يتعلق باختيار القطب ، بخلاف الحركة العامة .

وبالتالي القيمة العددية لسرعة النقطة M هي :

$$|\vec{v}(M)| = |\vec{v}(\text{o}) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}|$$

$$|\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}| = |\vec{\omega}|.|\overrightarrow{oM}|.\sin(\vec{\omega}, \overrightarrow{oM})$$

$$|\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}| = |\vec{\omega}|.|\overrightarrow{oM}| \quad ; \vec{\omega} \perp \overrightarrow{oM}$$

تعريف المركز الآني للدوران ونرمز له ب (I)

هو نقطة من المستوي المتحرك تنعدم سرعتها في لحظة ما بالنسبة للمستوي الثابت (π)

ونرمز له بـ (I) أي ان $I \in \pi$ وسرعته بالنسبة للجملة الثابتة $\vec{v}(I) = \vec{0}$.

بفرض (I) قطب للحركة عندئذٍ :

$$\forall M \in s: \vec{v}(M) = \vec{v}(I) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM}$$

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM} \quad ; \ \vec{v}(I) = 0$$

ومن هذه العلاقة نجد ان سرعة أي نقطة M من المستوي المتحرك هي في كل لحظة سرعة دورانية حول نقطة (I) ، وهو سبب تسميتها مركزاً آنياً للدوران .

$$|\vec{v}(M)| = |\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM}| \Longrightarrow |\vec{v}(M)| = |\vec{\omega}|.|\overrightarrow{IM}|$$

ومنه نستطيع كتابة شعاع الدوران $\vec{\omega}$ بالشكل :

$$\omega = |\vec{\omega}| = \frac{|\vec{v}(M)|}{|\overrightarrow{IM}|}$$

" مبرهنة "

إن المركز الآني للدوران إن وجد فهو وحيد .

الإثبات

نفرض جدلاً أن (I) و (I') مركزان آنيان للدوران في لحظة معينة حيث $\vec{v}(I) = 0, \vec{v}(I') = 0$ عندئذٍ باختيار (I) قطب للحركة في اللحظة المذكورة وبالتالي :

$$\underbrace{\vec{v}(I')}_{0} = \underbrace{\vec{v}(I)}_{0} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{II'} \Longrightarrow \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{II'} = 0$$

فإما إحدى الشعاعين معدومين أو أنهما متوازيين أي :

((إما $\vec{\omega}=\vec{0}$ وهي مرفوضة لأن الحركة دورانية))

((أو $\vec{\omega} \parallel \overrightarrow{II'}$ وهي مرفوضة لأن $\vec{\omega} \perp \overrightarrow{II'}$))

((أو $\overrightarrow{II'}=\vec{0}$ وهذا يعني أن (I) تنطبق على (I'))) ويتم المطلوب .

ملاحظة :

إذا كانت $A\,,B$ نقطتين من المستوي المتحرك فإن سرعة كل منهما تكتب كما يلي :

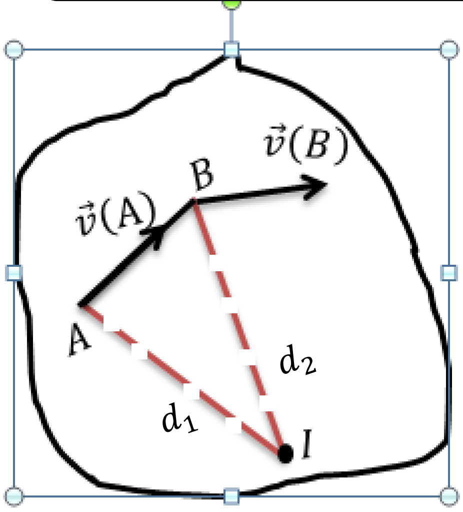
$$\vec{v}(\mathrm{A})=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{IA} \quad , \quad \vec{v}(\mathrm{B})=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{IB}$$

$$|\vec{v}(A)|=|\vec{\omega}|.\left|\overrightarrow{IA}\right| \quad , \quad |\vec{v}(B)|=|\vec{\omega}|.\left|\overrightarrow{IB}\right|$$

$$|\vec{\omega}|=\frac{|\vec{v}(A)|}{\left|\overrightarrow{IA}\right|}=\frac{|\vec{v}(B)|}{\left|\overrightarrow{IB}\right|}$$

طويلة شعاع السرعة على بعد النقطة عن مركز الدوران .

تعيين المركز الآني للدوران هندسيا "سؤال دورة"



نختار نقطتين $A\,,B$ من المستوي المتحرك ولنميز الحالات التالية :

الحالة الاولى : إذا كان $\vec{v}(\mathrm{A}) \neq \vec{v}(B)$

نرسم من النقطة A عموداً على $\vec{v}(\mathrm{A})$ وليكن (d_1)

ونرسم من النقطة B عموداً على $\vec{v}(B)$ وليكن (d_2)

وليكن $A_1 \in d_1$ **وبتطبيق نظرية المساقط** على $A\,,A_1$ نجد :

$$proj_{d_1}\vec{v}(A)=proj_{d_1}\vec{v}(A_1)=0$$

$$\vec{v}(A_1)=\begin{cases}\vec{0} & \\ \perp d_1 & \text{أو}\end{cases}$$

بنفس الطريقة $B_1 \in d_2$ **نطبق نظرية المساقط** على B, B_1 نجد :

$$proj_{d_2}\vec{v}(B)=proj_{d_2}\vec{v}(B_1)=0$$

$$\vec{v}(B_1)=\begin{cases}\vec{0} & \\ \perp d_2 & \text{أو}\end{cases}$$

ولما كان $\vec{v}(A)$ و $\vec{v}(B)$ غير متوازيين فإن (d_1) لا يوازي (d_2) أي المستقيمان (d_1) و (d_2) متقاطعين في المستوي π بنقطة واحدة ولتكن (I) ونلاحظ أن : $I \in d_2 \;\; \wedge \;\; I \in d_1$ ومنه :

$$\vec{v}(I)=\begin{cases}\vec{0}\\ \vec{v}(I)\perp d_1\end{cases} \quad \underset{\text{و}}{\wedge} \quad \vec{v}(I)=\begin{cases}\vec{0}\\ \vec{v}(I)\perp d_2\end{cases}$$

ولما كان من غير الممكن أن يعامد الشعاع شعاعين متقاطعين في مستويه فالاحتمال الثاني مرفوض وبالتالي فإن :

$$\vec{v}(I)=\vec{0}$$

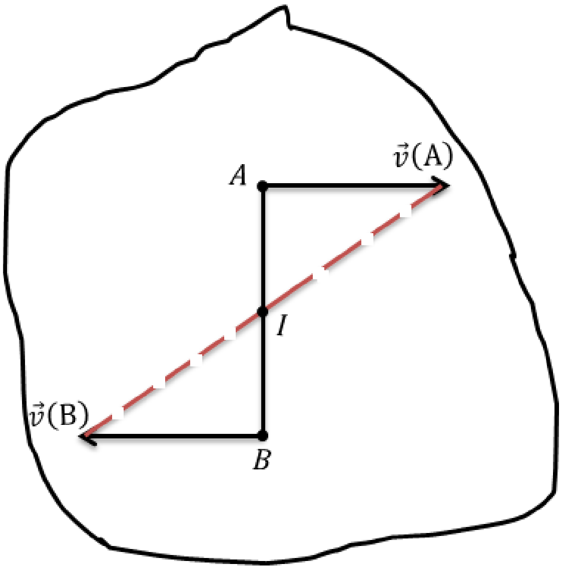
مما سبق نجد ان المركز الآني للدوران وحيد موجود يتعين هندسياً من تقاطع المستقيمين d_2, d_1 .

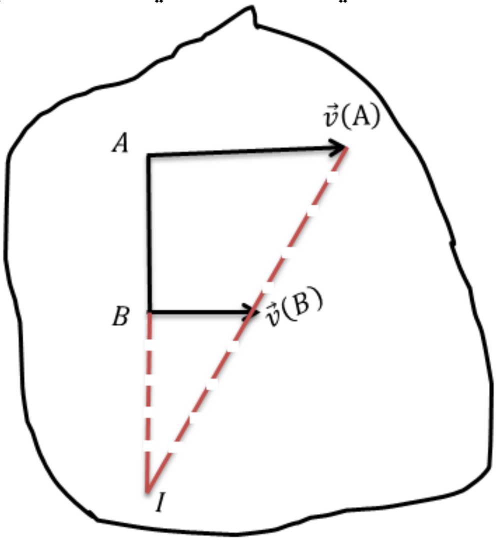
الحالة الثانية : إذا كان $\vec{v}(A) \neq \vec{v}(B)$ و $\vec{v}(A) // \vec{v}(B)$ ((هنا نظرية المساقط لا تتحقق))

لما كان $\vec{v}(A)$ يوازي $\vec{v}(B)$ فإن مسقط $\vec{v}(A)$ على $\overrightarrow{AB}$ لا يمكن أن يساوي مسقط $\vec{v}(B)$ على $\overrightarrow{AB}$ إلا إذا كان $\overrightarrow{AB}$ عامودياً على المنحى المشترك للسرعتين أي أن d_1 ينطبق على d_2 وينطبق على $\overrightarrow{AB}$ في هذه الحالة فإذا وصلنا نهاية $\vec{v}(A)$ إلى نهاية $\vec{v}(B)$ فإن هذا المستقيم يقطع $\overrightarrow{AB}$ بنقطة وحيدة I .

تتحقق العلاقة حسب تالس : $\dfrac{|\vec{v}(A)|}{\overrightarrow{IA}} = \dfrac{|\vec{v}(B)|}{\overrightarrow{IB}}$

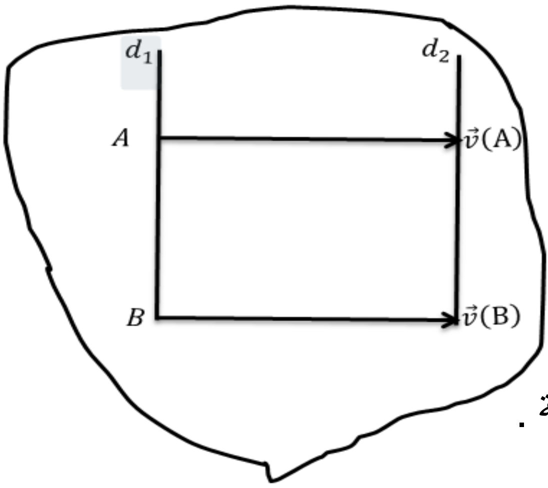
مما يدل على أن I هي المركز الآني للدوران في هذه الحالة .





الحالة الثالثة : $\vec{v}(A)//\vec{v}(B)$ و $\vec{v}(A) = \vec{v}$: $\forall A, B \in \pi$

نلاحظ في هذه الحالة أن النظرية المساقط لحركة الجسم الصلب تكون محققة دوماً ، فإذا رسمنا d_1, d_2 كما سبق فإننا نحصل على مستقيمين متوازيين في المستوي π وبالتالي تدل طريقة الانشاء السابقة أن I يبتعد إلى اللانهاية ونلاحظ من جهة أخرى أن الحركة هي حركة انسحابية في المستوي π في المستوي الثابت وبالتالي إن الحركة الانسحابية هي حركة دورانية حول مركز آني للدوران يقع في اللانهاية .



نتيجة لتعيين المركز الآني للدوران

لإيجاد المركز الآني للدوران في حال سرعة النقطة الأولى لا توازي سرعة النقطة الثانية نرسم عمود على النقطة الأولى وعمود على النقطة الثانية نقطة تلاقي العمودين هي المركز الآني للدوران .

إعداد: محمد علي فليون ** نهى حبشية

انتهت المحاضرة