◄ دكتور المادة: خليل يحيي

نظري

◄المحاضرة: العاشرة ◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية غير التامة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- حلول تمارين وظيفة المحاضرة الثامنة.

2- أشكال جديدة لعامل التكميل.

التمارين

تمرين 1:أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(x+y+1).dx+(x-y^2+3).dy=0$$

الحل:

$$M(x,y)=\mathrm{x}+\mathrm{y}+1 \Rightarrow \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{dy}}=1$$

$$N(x,y)=x-y^2+3 \Rightarrow \frac{dN}{dx}=1$$

نلاحظ أنّ: $\frac{dN}{dx}=\frac{dM}{dy}$ إذاً المعادلة التفاضلية تامة فالحل العام من الشكل: $F(x,y)=c$

لإيجاد الحل العام يجب إيجاد الدالة F , لنأخذ:

$$F(x,y)=\int M(x,y).dx+\varphi(y)=\int(x+y+1).dx+\varphi(y)$$

$$=\frac{x^2}{2}+yx+x+\varphi(y)$$

والآن نوجد المشتق الجزئي بالنسبة ل y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x - y^2 + 3 \Rightarrow \varphi(y) = y^2 + 3$$

$$\xRightarrow{\text{تكامل}} \varphi(y) = -\frac{1}{3}y^3 + 3y$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + x - \frac{1}{3}y^3 + 3y = c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

وأيضاً بإمكاننا أيجاد الحل العام بطريقة ثانية وذلك بأخذ:

$$F(x,y) = \int N(x,y).dy + \varphi(x)$$

ثمّ نشتق جزئياّ بالنسبة ل x ونوجد الحل العام.

تمرين2: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(4x - 3y - y.\sin x).dx + (\cos x - 3x - \sin y).dy = 0$$

الحل:

$$M(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 4\mathrm{x} - 3\mathrm{y} - \mathrm{y}.\sin x \Rightarrow \frac{dM}{dy} = -3 - \sin x$$

$$N(x,y) = \cos x - 3x - \sin y \Rightarrow \frac{dN}{dx} = -3 - \sin x$$

نلاحظ أنّ: $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ إذاً هي تامة والحل العام من الشكل: $F(x,y) = c$

لإيجاد الحل العام نأخذ: $F(x,y) = \int M(x,y).dx + \varphi(y)$

$$= \int (4x - 3y - y.\sin x).dx + \varphi(y) = 2x^2 - 3yx + y.\cos x + \varphi(y) \ldots (1)$$

والآن نشتق جزئياً بالنسبة ل y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -3x + \cos x + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$\Rightarrow -3x + \cos x + \varphi'(y) = \cos x - 3x - \sin y$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = -\sin y \Rightarrow \varphi(y) = \cos y \dots (2)$$

والآن نعوض (2) في (1) لنحصل على الحل العام:

$$F(x,y) = 2x^2 - 3yx + y\, cos\, x + \cos y = c$$

تنويه:

في المحاضرة السابقة قد تناولنا فكرة إيجاد عامل التكميل والآن سنعيد سرد هذه الفكرة للإتمام في هذه المحاضرة بناءً عليها.

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$\mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y}).\mathrm{dx} + \mathrm{N}(\mathrm{x},\mathrm{y}).\mathrm{dy} = 0 \dots (1)$$

معادلة تفاضلية غير تامة أي:

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}} \neq \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}}$$

عندها نوجد دالة $\mu(x,y)$ بحيث إذا ضربنا طرفي المعادلة (1) أصبحت تامة حيث $\mu(x,y)$ تسمى عامل التكميل.

$$\Rightarrow \mu(\mathrm{x},\mathrm{y}).\mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y}).\mathrm{dx} + \mu(\mathrm{x},\mathrm{y}).\mathrm{N}(\mathrm{x},\mathrm{y}).\mathrm{dy} = 0$$

ولكونها أصبحت تامة وذلك بعد ضربها ب $\mu(x,y)$ فيمكننا كتابة:

$$\frac{\partial\big(\mu(x,y).M(x,y)\big)}{\partial y} = \frac{\partial\big(\mu(x,y).N(x,y)\big)}{\partial x}$$

وللاختصار نرمز ب($\mathrm{M},\mathrm{N},\mu$)بدلا من($\mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y}),\mathrm{N}(\mathrm{x},\mathrm{y}),\mu(\mathrm{x},\mathrm{y})$).

هذا هو شرط أن تكون المعادلة التفاضلية تامة وحسب خاصة مشتق الجداء:

$$\Rightarrow \mathrm{M}.\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu.\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \mathrm{N}.\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu.\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}$$

الآن نعزل الحدود التي فيها μ :

$$\mathrm{M}.\frac{\partial \mu}{\partial y} - \mathrm{N}.\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left[\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\right]$$

و هنا نميز حالتين:

الحالة الأولى: عامل التكميل تابع ل x فقط: $\mu = \mu(x)$

الحالة الثانية: عامل التكميل تابع ل y فقط: $\mu = \mu(y)$

و قد درسناهم سابقاً

الحالة الثالثة:

لتكن لدينا المعادلة:

$$M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0 \dots (1)$$

إذا كانت المعادلة (1) غير تامة و غير متجانسة من الشكل:

$$x.M(x,y) + y.N(x,y) \neq 0$$

عندئذٍ عامل التكميل يكون من الشكل:

$$\mu = \frac{1}{M.x + N.y}$$

أمّا إذا كانت المعادلة (1) غير تامة و غير متجانسة من الشكل:

$$\mathrm{x}.\mathrm{M}(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \mathrm{y}.\mathrm{N}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \neq 0$$

وكانت المعادلة المعطاة بالشكل:

$$x.f_1(x,y).dx + y.f_2(x,y).dy = 0$$

عندئذٍ عامل التكميل يكون من الشكل:

$$\mu = \frac{1}{Mx - Ny}$$

مثال توضيحي:

أوجد عامل التكميل للمعادلة التفاضلية ثمّ أوجد الحل العام لها:

$$(x^2y - 2xy^2).dx - (x^3 - 3x^2y).dy = 0 \dots (*)$$

الحل:

لنبرهن أنها تامة أم لا:

$$M(x,y) = x^2y - 2xy^2 \Rightarrow \frac{dM}{dy} = x^2 - 4xy$$

$$N(x,y) = -x^3 + 3x^2y \Rightarrow \frac{dN}{dx} = -3x^2 + 6xy$$

أي أنّ المعادلة التفاضلية ليست تامة ونلاحظ أنها متجانسة أي أنّها من الحالة الأولى لنتحقق من الشرط الثاني ألا وهو:

$$x.M(x,y) + y.N(x,y) \neq 0$$

$$\Rightarrow x.M(x,y) + y.N(x,y) = x^3y - 2x^2y^2 - x^3y + 3x^2y^2b = x^2y^2 \neq 0$$

أيّ أنّ الشرط محقق ومنه يكون عامل التكميل:

$$\mu = \frac{1}{M.x + N.y} \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2y^2}$$

نضرب طرفي المعادلة (*) ب μ :

$$\frac{x^2y - 2xy^2}{x^2y^2}.dx - \left(\frac{x^3}{x^2y^2} - \frac{3x^2y}{x^2y^2}\right).dy = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right).dx - \left(\frac{x}{y^2} - \frac{3}{y}\right).dy = 0$$

أصبحت المعادلة التفاضلية تامة والآن لنوجد الحل العام:

$$F(x,y)=\int M(x,y).dx+\varphi(y)$$

$$=\int\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{x}\right).dx+\varphi(y)=\frac{x}{y}-2\ln x+\varphi(y)$$

نشتق جزئياً بالنسبة لـy :

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}-2y\ln x+\varphi'(y)=N(x,y)$$

$$-\frac{x}{y^2}-2yl\,n\,x+\varphi'\,(y)=-\frac{x}{y^2}-\frac{3}{y}\Rightarrow\varphi'(y)=2y\ln x-\frac{3}{y}$$

$$\xRightarrow{\text{تكامل}}\varphi(y)=y^2\ln x-3\ln y$$

نعوض قيمة $\varphi(y)$:

$$F(x,y)=\frac{x}{y}-2\ln x+y^2\ln x-3\ln y=c$$

<u>مثال 2 :</u> أوجد عامل التكميل ثمّ أوجد الحل العام:

$$y(xy+2x^2y^2).dx+x(xy-x^2y^2).dy=0\ ...(*)$$

الحل:

$$\mathrm{M(x,y)=xy^2+2x^2y^3\Rightarrow\frac{dM}{dy}=2xy+6x^2y^2}$$

$$N(x,y)=x^2y-x^3y^2\Rightarrow\frac{dN}{dx}=2xy-3x^2y^2$$

أي أنّها ليست تامة وليست متجانسة ونلاحظ أنّها من الشكل:

$$x.f_1(x,y).dx+y.f_2(x,y).dy=0$$

نبرهن أنّ $Mx - Ny \neq 0$:

$$Mx - Ny = x^2y^2 + 2x^3y^3 - x^2y^2 + x^3y^3 = 3x^3y^3 \neq 0$$

فيكون عامل التكميل من الشكل:

$$\mu = \frac{1}{M.x - N.y} = \frac{1}{3x^3y^3}$$

نضرب المعادلة (*) ب μ لتصبح تامة ثمّ نوجد الحل العام:

$$\left(\frac{xy^2 + 2x^2y^3}{3x^3y^3}\right).dx + \left(\frac{1}{3xy^2} - \frac{1}{3y}\right).dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{3x^2y} + \frac{2}{3x}\right).dx + \left(\frac{1}{3xy^2} - \frac{1}{3y}\right).dy = 0$$

الحل العام:

$$F(x,y) = \int M(x,y).dx + \varphi(y) = \int \frac{dx}{3x^2y} + \frac{2dx}{3x} + \varphi(y)$$

$$= -\frac{1}{3yx} + \frac{2}{3}\ln x + \varphi(y)$$

والآن نشتق جزئياً بالنسبة ل y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{3xy^2} + \frac{2}{3}y\ln x + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$\frac{1}{3xy^2} + \frac{2}{3}\,y\ln x + \varphi'(y) = \frac{1}{3xy^2} - \frac{1}{3y}$$

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{3y} - \frac{2}{3}y\ln x \overset{\text{تكامل}}{\Longrightarrow} \varphi(y) = -\frac{1}{3}\ln y - \frac{y^2}{3}\ln x$$

نعوض $\varphi(y)$ بالحل العام:

$$F(x,y) = -\frac{1}{3yx} + \frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{3}\ln y - \frac{y^2}{3}\ln x = c$$

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصرالله وياسين الحلبي ورهف النقشي

ما كنت عليه بالأمس ليس له ايةُ علاقة بما ستكون عليه في المستقبل

عالمك الداخلي

to improve our mathematics