

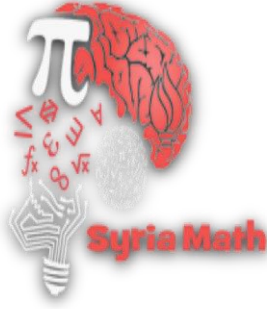
22-11-2017

◀ دكتوراة الملاءة: هدى شحات

نظري

عنوان المحاضرة: تنمة الحركة المستوية + أمثلة

◀ المحاضرة: الرابعة عشرة

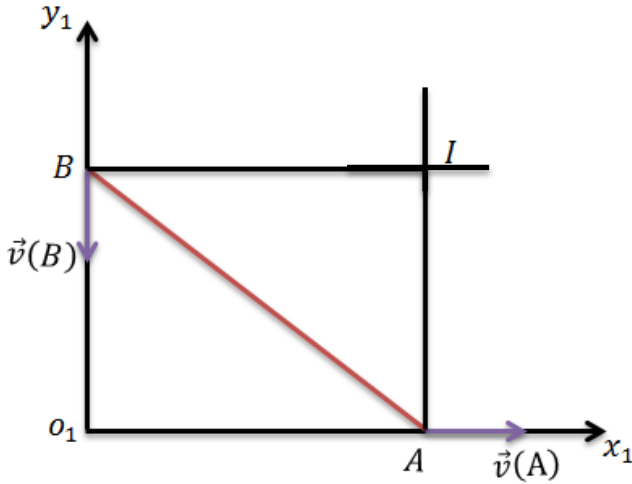


بداية أصدقائي سنحل بعض الأمثلة ومن ثم سنكمل دراسة الحركة المستوية ..

المثال الأول :

AB - مستقيم ينزلق طرفاه على محورين متعامدين بالمستوي $o_1x_1y_1$ عين المركز الآني للدوران .

الحل :

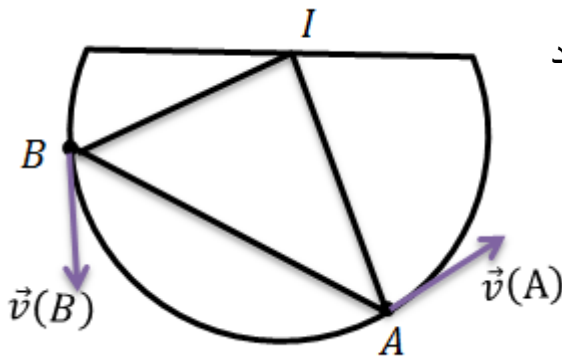


بما أن $\vec{v}(B)$ لاتوازي $\vec{v}(A)$ فنقيم عامود على $\vec{v}(A)$ ونقيم عامود على $\vec{v}(B)$ فيكون المحور الآني I هي نقطة التقاطع للمستقيمين . ((وهي الحالة الأولى))
((شرح)) لدينا من النص النقطة A تنزلق على المحور ox ومنه سرعة A محمولة على ox والنقطة B تنزلق على oy وبالتالي سرعة B محمولة على oy وتكون سرعتها عكس اتجاه المحور لأنها تنزلق عكس نحو الاسفل .

المثال الثاني :

نصف دائرة وقضيب AB يستند عليها بطرفيه عين المركز الآني للدوران .

الحل :



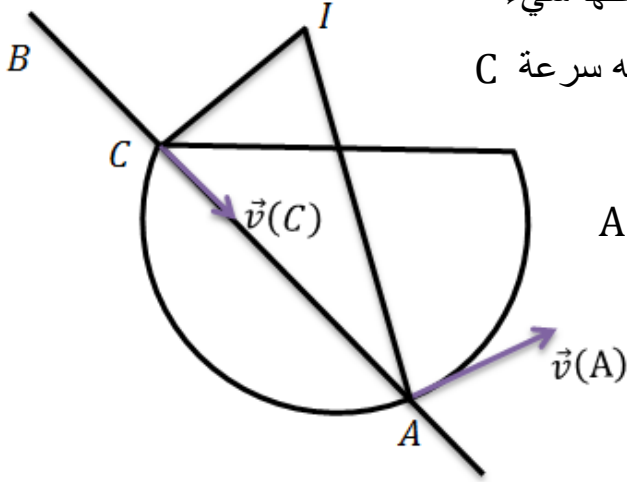
ايضاً هنا $\vec{v}(B)$ لا يوازي $\vec{v}(A)$ وبالتالي نقيم عامود على $\vec{v}(A)$ و $\vec{v}(B)$ عامود على $\vec{v}(B)$ والمحور الآني I هو نقطة تقاطع المستقيمين .

والسرعة محمولة على مماس الدائرة والعمود على المماس هو نصف القطر ومنه يكون مركز الدائرة هو نفسه المركز الآني للدوران .

المثال الثالث :

نصف دائرة ثابتة مركزها (o) ونصف قطرها (a) ، قضيب طولها (2ℓ) تتحرك نهايته (A) على محيط نصف الدائرة ويستند القضيب على الحافة (C) من الدائرة .

الحل :

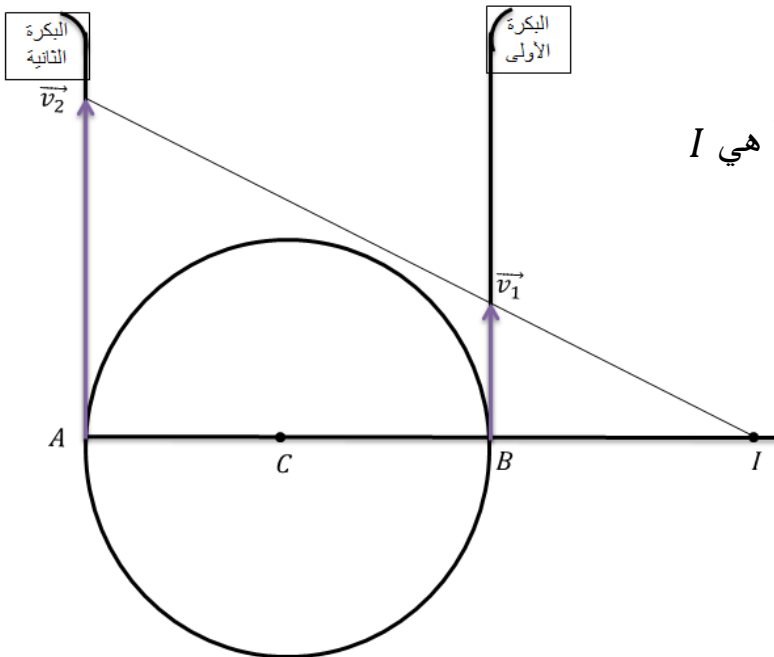


إن سرعة A هي مماس للدائرة أما سرعة B لا نعلم عنها شيء لذلك نستفيد من سرعة C وهي نقطة من القضيب ومنه سرعة C متغيرة على القضيب وثابتة بالنسبة لنصف القطر لتعيين المركز الآني للدوران نرسم عامود من سرعة A وعامود من سرعة C نقطة تلاقي المستقيمين هي I

المثال الرابع " سؤال دورة "

بكرة متحركة مركزها (c) نصف قطرها (a) ترفع شاقولياً بواسطة حبل يمر على محيطها وتمر نهايتها الحبل على بكرتين صغيرتين ثابتتين (A) ، (B) ، نقطتا تماس الحبل مع البكرة و (AB) هو قطر أفقي فيها فإذا علمت أن سرعة (A) شاقولية نحو الأعلى وتساوي (v_1) وسرعة (B) هي $(v_2 = 2v_1)$ عين المركز الآني للدوران .

الحل :



نلاحظ أن سرعتين غير متساويتين و متوازيتين ((الحالة الثانية)) فالتعيين المركز الآني نصل بين نهايات السرعة فنقطة التلاقي مع \overrightarrow{AB} هي I

" إيجاد القاعدة والمتدرج "

إن المركز الآني للدوران هو نقطة من المستوي المتحرك تأخذ في كل لحظة موضعاً معيناً في هذا المستوي وترسم حين يتغير الزمن منحنيماً ما في هذا المستوي نسميه منحني المتدرج كما أن لها موضعاً معيناً في المستوي الثابت في كل لحظة فهي ترسم مع تغير الزمن منحنيماً ما في المستوي الثابت أيضاً نسميه القاعدة

فالمحل الهندسي للمركز الآني للدوران بالمستوي المتحرك هو المتدرج والمحل الهندسي للمركز الآني للدوران بالمستوي الثابت هو القاعدة

من الواضح أن القاعدة والمتدرج يشتركان في كل لحظة بنقطة واحدة فقط هي المركز الآني للدوران I . تكون سرعة هذه النقطة معدومة بالنسبة للمستوي الثابت ، وتسمى حركة المنحني المتدرج المتماسك مع المستوي المتحرك ، بالنسبة لمنحني القاعدة أو المتماسك مع المستوي الثابت بحركة تدرج دون انزلاق أن المركز الآني للدوران I ينتقل على المنحنيين ((المتدرج والقاعدة)) فله سرعة انتقال على كل مستوي وهذه السرعة ((أي سرعة الانتقال وليست سرعة I)) متساوية سواء كانت الجملة ثابتة أم متحركة

أن المسافة المقطوعة لـ I على القاعدة تساوي المسافة المقطوعة لـ I المتدرج كما أن سرع المستقيم المار من I والعمودي على المستوي π معدومة وذلك حسب مبرهنة في بداية بحث الحركة المستوية نجد

((ان سرع اي مستقيم متماسك مع S و يعامد المستوي الأساسي للحركة المستوية))

يسمى هذا المحور بالمحور الآني للدوران ، وهذا المحور ينتقل في الفراغ الثابت مع تغير الزمن موازياً لنفسه بحيث يرسم سطحاً اسطوانياً دليلاً منحني القاعدة ، ندعو هذا السطح بـ سطح القاعدة . وينتقل أيضاً المحور الآني للدوران في الفراغ المتماسك مع الجسم مع تغير الزمن راسماً سطحاً اسطوانياً دليلاً منحني المتدرج ، ندعو هذا السطح بـ سطح المتدرج .

فيشترك سطح المتدرج مع سطح القاعدة في كل لحظة من الزمن بمستقيم ((المحور الآني للدوران)) سرعة نقاطه معدومة ، ونصّف الحركة المستوية بناءً على ذلك بأنها حركة جسم صلب يتدرج على سطح اسطواني متماسك مع الجسم على سطح اسطواني ثابت دون انزلاق ((أي هي حركة تدرج دون انزلاق))

ملاحظة :

- 1) لتعيين القاعدة هندسياً نبحث عن نقطة في المستوي الثابت يكون بعدها عن I ثابت .
- 2) لتعيين المتدرج هندسياً نبحث عن نقطة في المستوي المتحرك يكون بعدها عن I ثابت .

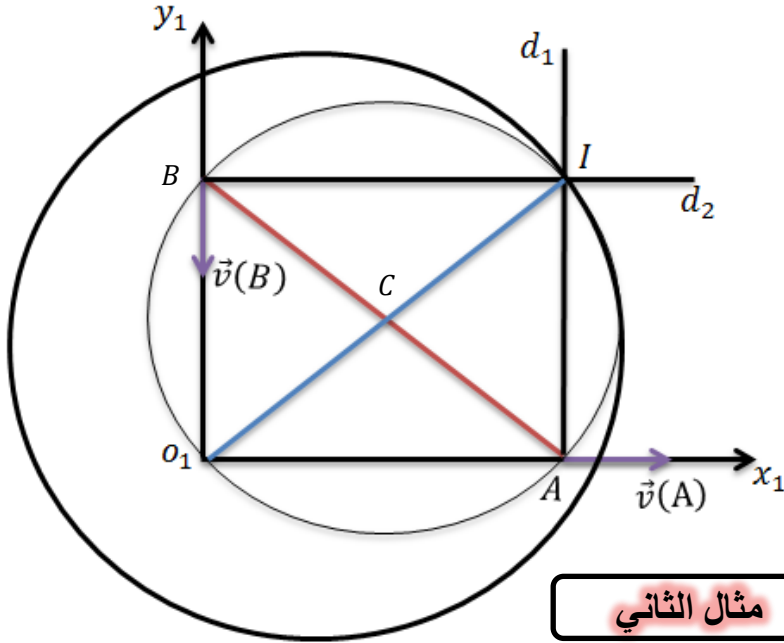
مثال الأول

قضيّب AB طوله $2l$ ينزلق طرفه A على المحور ox وطرفه B ينزلق على المحور oy عين القاعدة والمتدرج هندسياً .

الحل:

تعيين القاعدة : نبحث عن نقطة ثابتة بحيث يكون بعدها عن (I) ثابت دوماً في المستوي الثابت إن $AB = o_1I = 2l$ لأنها قطر في المستطيل (IBO_1A) ومنه (I) ترسم دائرة بالنسبة للمستوي الثابت

مركزها O_1 ونصف قطرها $2l$ أي $c(0,2l)$
تعيين المتدرج : نلاحظ وجود نقطة (c) في منتصف القضيب وبعدها عن I ثابت يساوي l وبالتالي I
 ترسم بالنسبة للمستوي المتحرك دائرة مركزها هو منتصف القضيب ونصف قطرها l أي $C_1(c, l)$
 والحركة هي تدحرج الدائرة الصغيرة داخل الدائرة الكبيرة دون انزلاق .



مثال الثاني

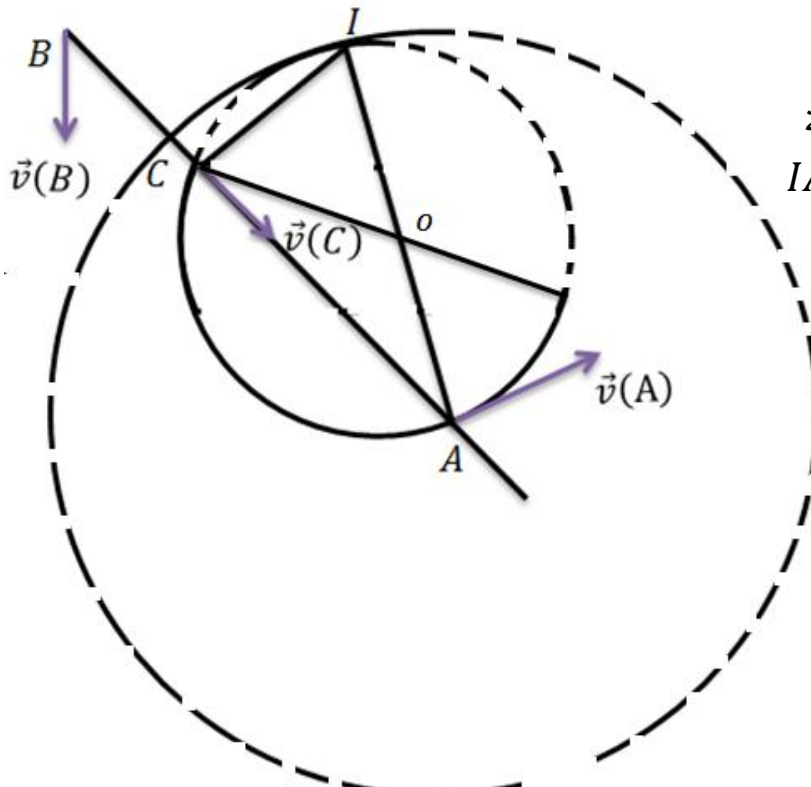
قضيب AB ينزلق طرفه A على نصف دائرة قطرها a ويستند طرفه الآخر على الحافة C ولا يغادرها عين القاعدة والمتدرج .

الحل :

تعيين القاعدة : إن المثلث ACI قائم

في C وبعده (I) عن (A) ثابت
 ((نقطة من محيط الدائرة لها بعد ثابت عن المركز))
 ترسم دائرة كاملة مركزها O هي القاعدة ، ومنه ACI مثلث قائم IA وتر المثلث هو قطر دائرة مركزها O ونصف قطرها $OI = a$ ، فالقاعدة $C(0, a)$.

تعيين المتدرج : إن بعد النقطة A عن I ثابت
 ((لأم IA قطر في الدائرة)) إن I ترسم دائرة مركزها A ونصف قطرها $AI = 2a$ فالمتدرج هو $C(A, 2a)$
 الحركة هي تدحرج الدائرة الكبيرة دون انزلاق خارج الدائرة الصغيرة .



تعيين القاعدة : إن المثلث ACI قائم
 في C وبعده (I) عن (A) ثابت
 ((نقطة من محيط الدائرة لها بعد ثابت عن المركز))
 ترسم دائرة كاملة مركزها O هي القاعدة ، ومنه ACI مثلث قائم IA وتر المثلث هو قطر دائرة مركزها O ونصف قطرها $OI = a$ ، فالقاعدة $C(0, a)$.

تعيين المتدرج : إن بعد النقطة A عن I ثابت
 ((لأم IA قطر في الدائرة)) إن I ترسم دائرة مركزها A ونصف قطرها $AI = 2a$ فالمتدرج هو $C(A, 2a)$
 الحركة هي تدحرج الدائرة الكبيرة دون انزلاق خارج الدائرة الصغيرة .

توزيع التسارعات في الحركة المستوية

(1) عبارة التسارع بدلالة O قطب الحركة

لتكن M نقطة كيفية من الجسم الصلب S و O قطب الحركة عندئذٍ :
علاقة السرعة تعطى بالعلاقة

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

وبالاشتقاق نجد :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

لتكن O_1 نقطة ثابتة في الفراغ عندئذٍ :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = -\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_1O}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}(M) - \vec{v}(O))$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

ومنه حسب علاقة جيبس

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} - \omega^2 \overrightarrow{OM}$$

حيث $\vec{\Gamma}(O)$ تسارع القطب وهو انسحابي ، و $(\vec{\omega} \perp \overrightarrow{OM})$ دوماً
و $(\vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} - \omega^2 \overrightarrow{OM})$ تسارع دوراني حول القطب (O)
ملاحظة : $\vec{\varepsilon}$ ايضاً يكون عامودي على مستوي الحركة وعلى المستوي الأساسي
لأنه يوازي مستوي الحركة .

(2) علاقة التسارع بدلالة I (المركز الآني للدوران)

لتكن M نقطة كيفية من الجسم الصلب S و I قطب الحركة عندئذٍ :
علاقة السرعة تعطى بالعلاقة :

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM}$$

بالاشتقاق نجد :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{IM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{IM}}{dt}$$

و لتكن O_1 نقطة ثابتة في الفراغ عندئذٍ :

$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IO_1} + \overrightarrow{O_1M} = -\overrightarrow{O_1I} + \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_1I}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{IM} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{O_1I}}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overline{IM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M) - \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

حيث (\vec{u}) سرعة انتقال المركز الآني للدوران على القاعدة .
 وهذا التسارع لا يشكل تسارع دوراني بالنسبة لنقطة القطب .

أم هبَّتِ الرِّيحُ من تلقاءِ كاظمة
 وأومَضَ البَرْقُ في الظُّلَماءِ مِنْ إِضْمٍ
 فما لعينيكِ إن قلتِ اكففا
 هَمَمَتَا وَمَا لِقَلْبِكَ إن قُلْتَ اسْتَفِقْ يَهُم

انتهت المجازة

إعداد: محمد علي فليون *** هي حبشية
 *** هي حبشية