/ /

مقرر بحوث العمليات. الدكتورة نضوه الجيروديي.

بحوث العمليات: تعتبر من المقررات التي تحتاج إلى سرعة وممارسة في الحل.
وليست صعبة نسبياً.

تخصص المادة في هذه السنة مشتركة لاختصاص التحليل والنظرية.

ملاحظات:

- كل هامش سيذكر هنا خلال المحاضرات لم تقم الدكتورة بكتابته وإنما أضفته فقط لشرح الفكرة أكثر وما إلى ذلك..
- يرجى في حال ورود أخطاء أو في حال استفسارات وأسئلة عن المادة التي سأقوم بكتابتها على الموقع هنا يرجى مراجعتي على حسابي على الـ facebook Reem Nablsi أو مراجعتي في الجامعة.
- سنقوم بإرفاق أسئلة الدورات وحلولها استعداداً لما سيكون في نهاية الفصل.
- أتمنى التوفيق لكم ولي.. والحمد لله رب العالمين.

Scanned by CamScanner

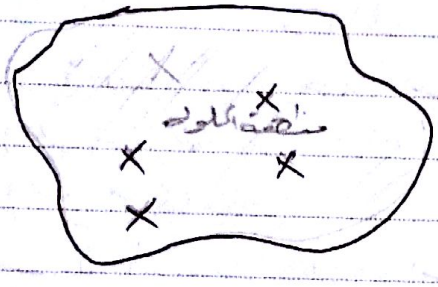
المحاضرة الأولى ...

تهتم بحوث العمليات بالحل الأمثل.

ماذا يعني الحل الأمثل ؟! يعني عندي مجموعة حلول يدي اختار منها حل بالاعتماد على شيء نسميه دالة الهدف.

نفرض لدينا مسألة معينة وهذه المسألة لها : مجموعة شروط ، دالة هدف.

- وعندما نرسم مجموعة الشروط نظهر لدينا منطقة الحلول بهذا الشكل.



(-1-)

تتشكل منطقة الحلول من مجموعة حلول وشروط مثلاً :

- شركة إنتاج سيارات مثلاً : ① كمية الإنتاج للشركة محدودة
② كمية الحديد محدودة ③ عدد العمال محدود ④ عدد الساعات التي يعمل بها المصنع محدودة

- نكتب هذه العلاقات (4) ونوضح المنطقة التي تحقق كل الشروط بيطلعنا شيء اسمه منطقة الحلول.

ثم نذهب ونرى دالة الهدف التي تحقق شروط المسألة

كل نقطة من نقاط المنطقة (-1-) تحقق شروط المسألة

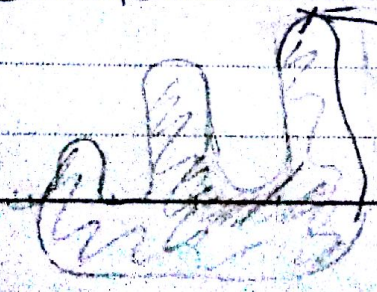
الخلاصة: البرنامج مكون من دالة هدف وشروط المسألة.

- شروط المسألة : تكلم عن بعضهم بيشكلو منطقة الحلول

- الحل الأمثل : نقوم باخذه بالاعتماد على دالة الهدف.

أي : شركة سيارات تريد إنتاج عدد من السيارات لتحقيق أكبر ربح ممكن.

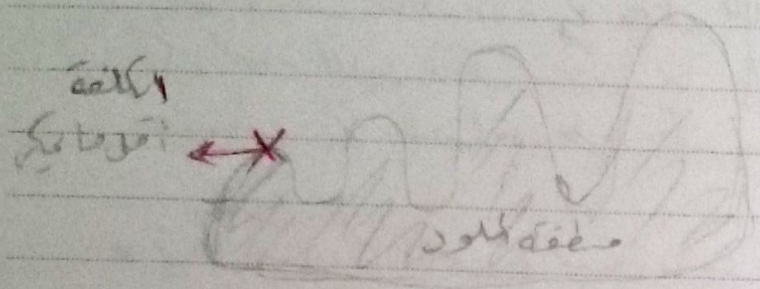
الحل : نقوم بكتابة دالة الهدف رياضياً بعدين نرى الحل الأمثل.



Amour

Scanned by CamScanner

- حالات شركة أخرى وكده
هنرؤه تكون الكلفة أقل ما يمكن .
- حالات شركة أخرى كده هنرؤه يكون
التوت الذي نزرع عن المصنع أقل ما يمكن
وهكذا ...



إذاً أقل دالة هدف بتعطيني حل سهل حلول بسهولة .

- ليكن لدي دالة الهدف خط مستقيم (على شكل تابع خطي) ناخذ مواز يات لدالة الهدف هدفي أكبر ربح مثلاً لديه ممكن نوزع المواز يات ويكون لدينا أكثر الأمثل
- حسب دالة الهدف مثلاً أكثر .

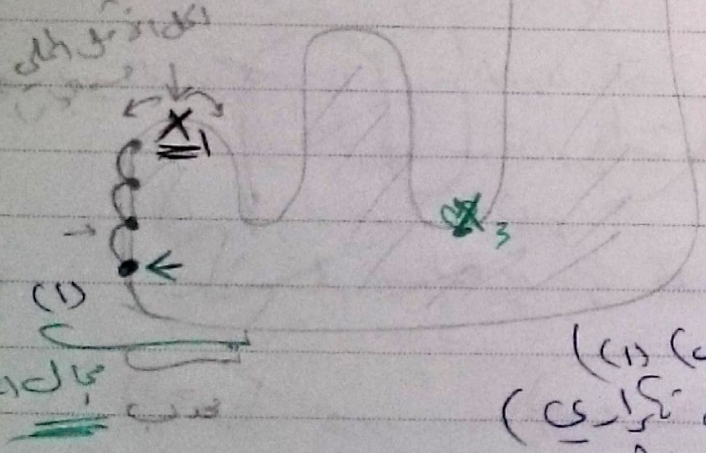
نريد المتكلم الذي عنده المجموعات الحدية وهي التي تفيدنا إذا كنا نتكلم

التابع بالمسألة عدب أو لا

⇐ هنا التابع غير محدب ومنطقة الحلول هذا الشكل

المسألة كلا غير محدبة

لتقديم أكبر ربح أكثر الأمثل الحلي X_2



- هذه المجموعة غير محدبة مشكلة هي
غالباً طريقة الحل تقريبا الحل الأمثل بالطريقة
التالية : نبدأ من نقطة معينة ← (أعلى الشكل) (1)
ننتقل من نقطة إلى أخرى (الحل مبني تكراري)
يعني من نقطة معينة حتى يصل للحل الأمثل
فيأخذ جوار للنقطة { أحسن نقطة } بيشوف يلي بعدها ويلي بعدها
نقيم النقطة يلي في دالة الهدف أكبر فينتقل للنقطة يلي بعدها وهكذا ..
حتى يصل للنقطة X_1 وهذه النقطة أحسن من يلي قبلها ويلي بعدها
أي أكبر من .
هنا تقف الطريقة ويكون هذا الحل الأمثل

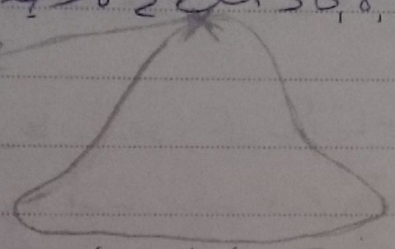
- لكن هذا الحل الأمثل محلي بالنسبة للحال (2) ولكن ليس حل أمثل
لكامل المسألة يعني الحل الأمثل هو X_2 على حسب هيك بدأ الطريقة
يصل للحل الأمثل

Alnour

Scanned by CamScanner

إذا بدأت من النقطة x_3 بحل الحل الأمثل x_2 إذاً حسب أين أبدأ؟
ممكن أصل للحل الأمثل ممكن لا. [الحل الأمثل للمسألة كحل]
سمي x_1 حل أمثل محلي حسب الجوار الموجود

* في حال كانت العجوبة محدبة ما عندي في المشكلة أي طريقة تكرارية كانت إذا وجدي طريقة ثانية لإيجاد الحل في تأمين الحل الأمثل



* أما إذا كانت العجوبة غير محدبة ممكن أضمن أو لا أن الحل الأمثل المحلي (أنو يكون حل أعظمي أو لا كما شرحنا سابقاً)

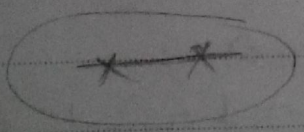
مسألة محدبة: نضمن الحل الأعظمي

مسألة غير محدبة: هنا أمام حالة الحل الأمثل المحلي ولا أعلم إذا كان حل الكل للمسألة أو لا.

* نريد أن نعرف المسألة هل المسألة محدبة أو لا؟!
محدبة أي طريقة سنتبعها بتأمين الحل، غير محدبة يجب علينا تغيير طريقة الحل لإيجاد الحل الأمثل
* وسنتكلم عن الطريقة التي تحل لنا المسائل المحدبة أو غير المحدبة.

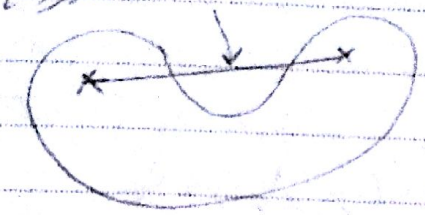
العجوبة المحدبة:

تعريف العجوبة المحدبة: المستقيم المار بين أي نقطتين فيها يجب أن يبقى لها



محدبة

هذا الجزء غير واقع في المجموعة



(مثال)

هذه المجموعة غير محدبة
لأنه يوجد جزء من المستقيم غير واقع في المجموعة.

التعريف العام: المجموعات المحدبة:

نقول عن مجموعة $C \subseteq \mathbb{R}^n$ أنها محدبة إذا كان

$$\forall x, y \in C, \lambda \in [0,1] \Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

نأخذ من λ:

$$\lambda = 1 \Rightarrow x \quad , \lambda = 0 \Rightarrow y \quad , \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$

مثال: ليكن لدينا $\phi, \mathbb{R}$ مجموعات محدبة بينما N و C_2 ليست محدبة.

هل المجموعة $C_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$ محدبة؟ ولماذا؟

$C_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$ محدبة؟ ولماذا؟

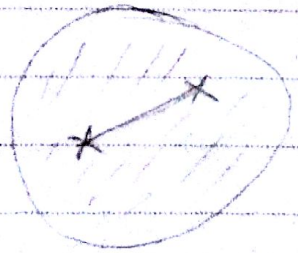
$C_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1 \}$ محدبة؟ ولماذا؟

الحل:

لنأخذ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in C_1$$

$$B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in C_1$$



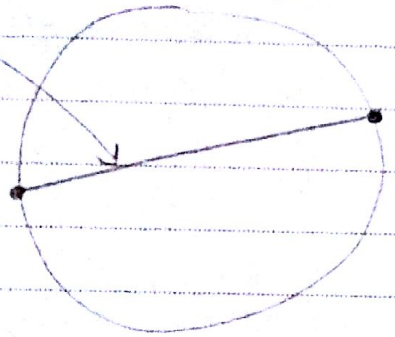
أي نقطتين نأخذهم داخل القرص سيمر المستقيم لهذا القرص وبالتالي المجموعة محدبة.

Scanned by CamScanner

C_2 هي المجموعة التي تحقق أن القطاع يمس (المستوي فقط) سطح القرص

مثال ② [هذا الرسم يوضح أن هناك نقطتين تقاطع]

هذا الخط لا يمس الجسم (على سطح القرص)



نفترض أن C_2 محدبة.

$A = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in C_2$

$B = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \in C_2$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$

نأخذ $\lambda = \frac{1}{3}$ ونوضح أنها ليست محدبة.

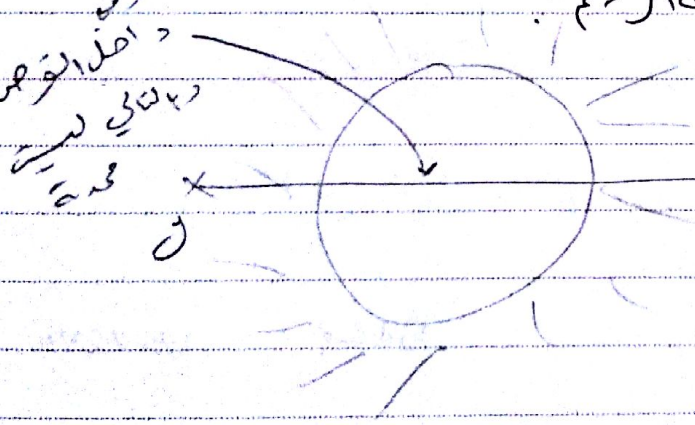
$\lambda = \frac{1}{3}$

$\lambda A + (1-\lambda)B = \frac{1}{3}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{2}{3}(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}})$

$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (-\frac{1}{3\sqrt{2}})^2 \neq 1 \Rightarrow \notin C_2$

وبالتالي C_2 ليست محدبة.

مثال ③ أيضاً C_3 ليست محدبة لنفس الرسم.



(C_3 هي المجموعة التي تحقق أن القطاع ليس تتمي إلى داخل القرص) فالواصل بين أي نقطتين سيكون جزء منه مستقيم داخل القرص. وبالتالي C_3 ليست محدبة.

وكمثال عددي آخذ أكرة برتقالة C_2.

[بالاستعانة: البرتقالة الحبيبة (أي محدبة مثلاً) يكفي إعطاء مثال واحد فقط.]

Alnour

Scanned by CamScanner

لبرهان أن C_1 دائرة مجوفة كذبة :

$$\forall A,B \in C_1 \Longrightarrow A=(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2 \leq 1$$
$$B=(y_1,y_2) : y_1^2+y_2^2 \leq 1$$

$$\forall \lambda \in [0,1] : D = \lambda A + (1-\lambda)B$$
$$= \lambda(x_1,x_2) + (1-\lambda)(y_1,y_2)$$

$$D = (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2)$$

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1)^2 + (\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2)^2$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 y_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + (1-\lambda)^2 y_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1y_1 +$$

$$+ 2\lambda(1-\lambda)(x_2y_2)$$

$$= \lambda^2(x_1^2+x_2^2) + (1-\lambda)^2(y_1^2+y_2^2) + 2\lambda(1-\lambda)(x_1y_1+x_2y_2)$$

($x_1^2+x_2^2 \leq 1$, $y_1^2+y_2^2 \leq 1$)

$$\leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)(x_1y_1+x_2y_2)$$

$$(\lambda^2 + 1 + \lambda^2 - 2\lambda = -2\lambda(1-\lambda)+1)$$

$$= -2(1-\lambda) + 1 + 2\lambda(1-\lambda)(x_1y_1+x_2y_2)$$
$$= 1 + \lambda(1-\lambda)(2x_1y_1+2x_2y_2-2)$$
$$= 1 + \lambda(1-\lambda)(2x_1y_1+2x_2y_2-1-1)$$
$$\Longrightarrow 1 + \lambda(1-\lambda)(2x_1y_1+2x_2y_2-1-1)$$

$x_1^2+x_2^2 \leq 1$ لدينا

$\Longrightarrow -1 \leq -x_1^2-x_2^2$

Scanned by CamScanner

$$\leq 1 + \lambda(1-\lambda)\left(2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1^2 - x_2^2 - y_1^2 - y_2^2\right)$$

$$= 1 - \lambda(1-\lambda)\left((x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2\right)$$

$0 \leq \lambda \leq 1$ ، $(x_1+y_1)^2 \leq 1$

$(x_1+y_1)^2 = z_1^2$

$(x_2+y_2)^2 = z_2^2$

$$(1-\lambda) \leq 1$$

$$\leq 1$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda(1-\lambda)\left((x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2\right) \leq 1$$

≤ 1

وبالتالي فإن $D_1^2 + D_2^2 \leq 1 \Leftarrow D \in C$

وبالتالي نابه بالجوهرة C محدبة

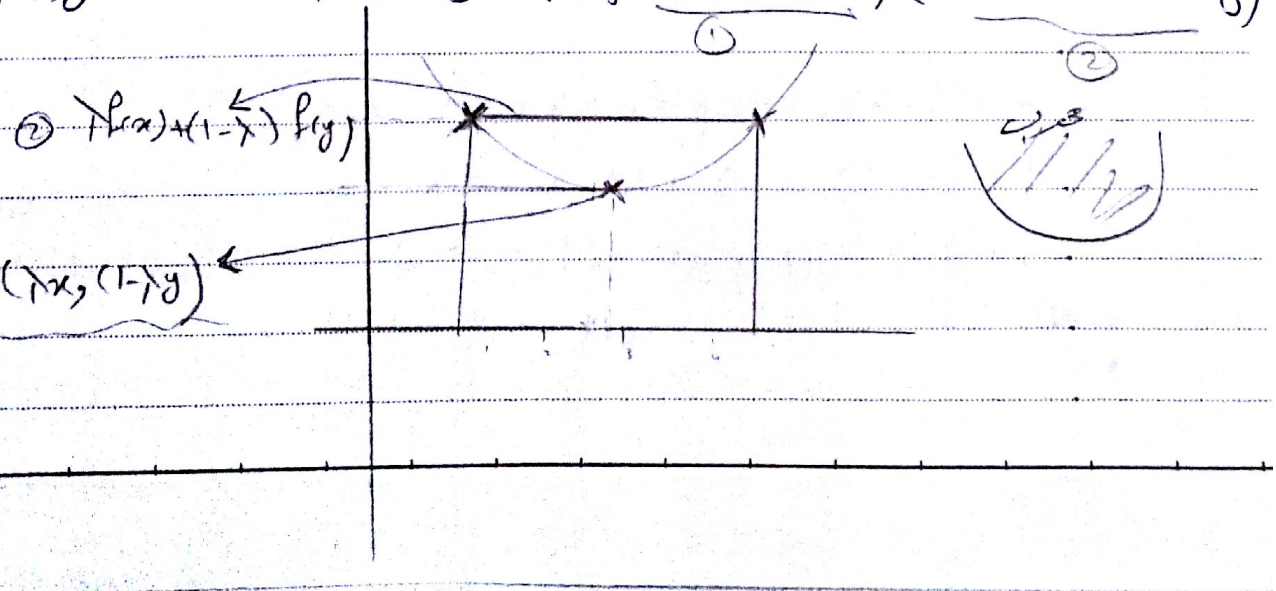
ملاحظة: في حال عدنا كاسقة $\overrightarrow{AB}$ نرمز $\overrightarrow{OB}$ ، $\overrightarrow{OA}$ $|\overrightarrow{AB}| \leq 1$

تابع محدب:

ليكن C مجموعة محدبة غير الخالية $f: C \longrightarrow \mathbb{R}$ يقال عن f تابع محدب إذا كان

$$\forall x,y \in C \quad \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

(1) (2)



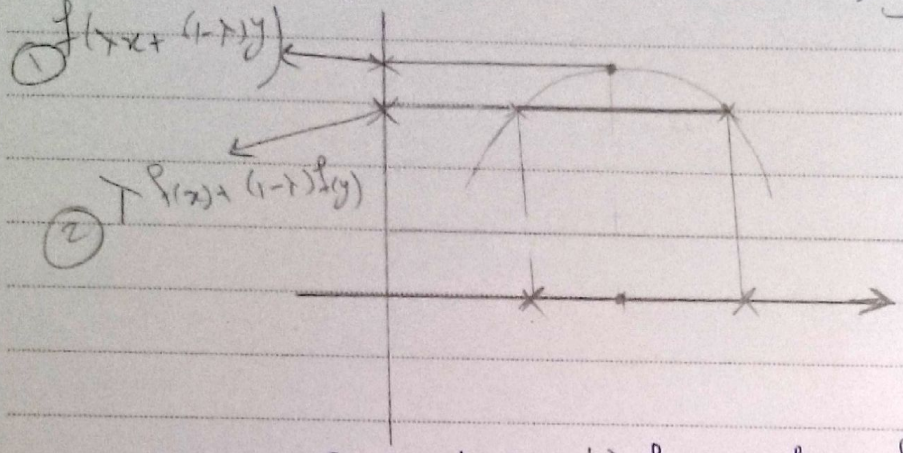
Scanned by CamScanner

التابع المقعر:

ليكن C مجموعة محدبة غير الخالية و $f: C \to \mathbb{R}$ يكون مقعر

$\forall x,y \in C \quad \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

① ②



صورة النقطة الواقعة بين x و y أكبر من صورة النقطة الواقعة بين x و y بالشكل $\lambda x + (1-\lambda) y$

نلاحظ $f(\lambda x + (1-\lambda)y)$ تكون $\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ في حال الواقعة.

التابع المحدب تماماً والمقعر تماماً:

ليكن C مجموعة محدبة وليكن $f: C \to \mathbb{R}$

نقول عن f أنه محدب تماماً إذا كان:

$\forall x,y \in C \quad \forall \lambda \in (0,1)$ يمثل الصفر والواحد لا ينتميان إلى المجال

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

ونقول عن f أنه مقعر تماماً إذا كان:

$\forall x,y \in C \quad \forall \lambda \in (0,1)$

$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

التمرين: هل التوابع محدبة أو مقعرة ولماذا؟

① $f_1(x,y) = x^2 + 9y^2 + 6xy$ ② $f_2(x,y) = 2x - 3y - 7$

③ $f_3(x,y) = \min\{x, -2x\}$ ④ $f_4(x,y) = \max\{x, 3x\}$

(نتوقف بالمحاضرة ٨)

Scanned by CamScanner