المحاضرة الرابعة

المسألة الأمثلية (البرنامج):

$Min\ f(x)$ دالة الهدف

شروط المسألة $S.t\ \{ g_i(x) \leq b_i \quad x \in R^n$

$i = 1, \dots, m$

ملاحظة: يمكن تحويل الشكل العام للبرنامج إلى الشكل القياسي

① تحويل الـ Max إلى Min بالاعتماد على الشرط التالي

$$Max\ f(x) \Longleftrightarrow Min\ -f(x)$$

نضرب دالة الهدف بـ (-1)

② تحويل المتحولات الحرة إلى متحولات غير سالبة، ليكن x_i متحول حر نكتبه كطرح متحولين موجبين

$$x_i = y_i - z_i \ ; \quad y_i, z_i \geq 0$$

③ تحويل المتراجحات إلى مساواة ونحول المقدار الثابت في الطرف الأيمن إلى مقدار موجب (نضرب المتراجحة بـ -1 إذا كان سالب).

$$3x_1 + 5x_2 - x_3 \geq -3 \Longleftrightarrow -3x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 3$$

أ) إذا كانت المتراجحة أكبر أو يساوي $(\geq)$ نقوم بطرح متحول غير سالب من الطرف الأول ونستبدل المتراجحة بمساواة

ب) إذا كانت المتراجحة أصغر أو يساوي $(\leq)$ نقوم بجمع متحول غير سالب مع الطرف الأول ونستبدل المتراجحة بمساواة

مثال: حول البرنامج التالي إلى برنامج قياسي:

$$Max\ 3x_1 + 7x_2 \qquad x \in R^2$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 3 \\ 8x_1 - 3x_2 \geq -5 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

① نستبدل x_2 بـ $x_2 = y_2 - z_2$ حيث $y_2, z_2 \geq 0$

② نضرب دالة الهدف بـ -1

$$Min(-3x_1 - 7y_2 + 7z_2)$$

③

$$2x_1 + 5\cancel{x_2}(y_2 - z_2) \geq 3$$
$$-8x_1 + 3(y_2 - z_2) \leq +5$$

(هنا ضرب ② بـ -1 لتحويل العدد الثابت الذي ... مقدار موجب)

$$2x_1 + 5y_2 - 5z_2 \geq 3$$
$$-8x_1 + 3y_2 - 3z_2 \leq 5$$

$$s.t = \begin{cases} 2x_1 + 5y_2 - 5z_2 - S_1 = 3 \\ -8x_1 + 3y_2 - 3z_2 + S_2 = 5 \\ x_1, y_2, z_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

مسألة أمثلية (شكل قياسي)

$$\min_{x \in X} f(x)$$
$$s.t \quad g_i(x) = b_i \qquad ①$$
$$x \geq 0$$

منطقة الحلول $X(b)$:

المنطقة التي تحوي جميع النقاط $x \in R^n$ والتي تحقق جميع شروط المسألة:

$$X(b) = \{ x \in X : g_i(x) = b_i \quad : i = 1, \ldots, m \}$$

نقول عن $x \in R^n$ أنها حل لـ ① إذا كان $x \in X(b)$

نقول عن $x \in R^n$ أنها حل لـ ① إذا كان $x \notin X(b)$

تعريف الحل الأمثل x^* للمسألة: هي نقطة من منطقة الحلول التي تعطي أفضل قيمة لدالة الهدف بالنسبة للمسألة ①

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in X(b)$$

مثال: ليكن لدينا البرنامج التالي

$$\begin{aligned} &\text{Min } 2x_1 \quad x \in R^2 \\ &\text{s.t} \quad x_1 - x_2 = 3 \\ &\qquad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

① حدد منطقة الحلول

② حدد الحل الأمثل

③ هل القيم التالية حلول؟ ولماذا؟

$(4,3)$ ، $(3,7)$ ، $(2,5)$ ، $(4,3)$

الحل: دالة الهدف $(f(x) = 2x_1)$ تعتمد على متحول واحد فقط x_1 ، ونكتب المسألة بشكل على x_1 ، نعوض بالشرط بشرط واحد

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 3 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= 3 + x_2 \quad \forall x_2 \in R \\ x_1 &\geq 3 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\text{Min } 2x_1 \\ &x \in R^2 \quad x_1 \geq 3 \end{aligned}$$

منطقة الحلول:

$$X(b) = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : x_1 \geq 3,\ x_2 \in R^+\}$$

الحل الأمثل x^*

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) \qquad \begin{aligned} x_1^* &= 3 \\ x_2^* &\in R^+ \end{aligned}$$

$f(x^*) = 6$ (قيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل)

$x^* = (3, x_2^*)$ $\in R^+$ (يوجد عدد غير منتهي من الحلول المثلى هنا)

③ $(4,3)$ حل لأنها نقطة من منطقة الحلول فهي حل.

$x_1 = 4 \geqslant 3$, $x_2 = 3 \in R^+$

$(3,7)$ حل أمثل ، $(2,5)$ ليست حل لأن $x_1 = 2 \not\geqslant 3$

$(4,-7)$ ليست حل لأن $x_2 = -7 \notin R^+$

طريقة لاغرانج:

لحل المسائل الأمثلية (الشكل القياسي) الشكل ①

دالة لاغرانج من الشكل

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum \lambda_i (g_i(x) - b_i)$$

$$① \begin{cases} \min\limits_{x \in X} f(x) \\ s.t \quad g_i(x) = b_i \\ \qquad x \geqslant 0 \end{cases}$$

البرنامج بشكل القياسي

$g_1(x) = b_1$

$\vdots$

$g_m(x) = b_m$

تسمى $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in R^n$ بمضاريب لاغرانج

ويسمى λ_i بجذور لاغرانج للشرط i

نظرية لاغرانج الكلاسيكية:

من أجل المسألة ① نفرض $\lambda^* \in R^*$ و $x^* \in X$ تحقق

$$L(x^*, \lambda^*) = \min_x (x, \lambda^*) \qquad (1.1)$$

ولنفرض أن $x^* \in X(b)$ عندها x^* هو الحل الأمثل للمسألة ①

البرهان:

$$\underset{x\in X}{\mathrm{Min}}\ f(x)$$

$$\text{St}\quad g_i(x) = b_i$$

$$x \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \underset{x\in \underbrace{X(b)}_{\text{منطقة الحلول}}}{\mathrm{Min}} f(x) = \underset{x\in X(b)}{\mathrm{Min}} f(x) + 0$$

$$0 = -\sum \lambda_i^*(g_i(x) - b_i)$$

$$x \in \{x \in X : g(x) = b_i \ ; x \geq 0 , i = 1, \dots, n\}$$

$$g_i(x) = b_i \Longleftrightarrow (g_i(x) - b_i) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_i^*(g_i(x) - b_i) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^*(g_i(x) - b_i) = 0$$

لدينا

$$\underset{x\in C\subseteq R}{\mathrm{Min}}\ h(x) \geq \underset{x\in R}{\mathrm{Min}}\ h(x)$$

$$\Longleftrightarrow \underset{x\in X(b)}{\mathrm{Min}}\ f(x) = \underset{x\in X(b)}{\mathrm{Min}}\ f(x) - \sum \lambda_i^*(g_i(x) - b_i)$$

$$\geq \underset{x\in X}{\mathrm{Min}}\ f(x) - \underbrace{\sum \lambda_i^*(g_i(x) - b_i)}_{\text{تعريف لاغرانج}} \ ; \ X(b) \subseteq X$$

$$= \mathrm{Min}\ \mathcal{L}(x, \lambda^*) = \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$$

حسب (1.1)

x^* حل أمثل للبرنامج ①

$$X(b) = \begin{cases} x \in X \\ g_i(x) = b_i \\ x \geq 0 \end{cases}$$

The end ^_^