◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: التاسعة عنوان المحاضرة: تتمة في التدحرج دون انزلاق

سنكمل أصدقائي في هذه المحاضرة دراسة فقرة التدحرج دون انزلاق

إيجاد $\vec{\omega}$ في الجملة المتماسكة

لدينا علاقة شعاع الدوران للتدحرج بدون انزلاق

$$\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$$

ونعلم ان كل من $(\vec{u}, \overrightarrow{k_1})$ متجهات يجب استبدالهم ((اما بالإسقاط أو بمصفوفات التحويل)) بمتجهات الجملة المتماسكة $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ليصبح الشعاع $\vec{\omega}$ في الجملة المتماسكة

لنوجد أولاً $\overrightarrow{k_1}$ ...

$$\overrightarrow{k_1} = \sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{k}$$

نلاحظ انه ظهر لدينا المتجه $\vec{v}$ لذلك يجب علينا ايجاده ايضاً لتصبح العلاقة محمولة على كل من متجهات الجملة المتماسكة $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ فقط .

$$\vec{v} = \sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

نعوض علاقة $\vec{v}$ بعلاقة $\overrightarrow{k_1}$ فتصبح ...

$$\overrightarrow{k_1} = \sin\theta(\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}) + \cos\theta\,\vec{k}$$

لنوجد الآن $\vec{u}$ عن طريق مصفوفات التحويل كما في المحاضرة السابقة .

$$\vec{u} = \cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

بتعويض كل من $\overrightarrow{k_1}, \vec{u}$ في علاقة شعاع الدوران $\vec{\omega}$ نجد :

$$\Rightarrow \vec{\omega} = (\psi'\sin\theta\sin\varphi + \theta'\cos\varphi)\vec{\imath} + (\psi'\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi)\vec{\jmath} + (\psi'\cos\theta + \varphi')\vec{k}$$

حيث

$$\vec{\omega} = \underbrace{(\psi'\sin\theta\sin\varphi + \theta'\cos\varphi)}_{p}\,\vec{\imath} + \underbrace{(\psi'\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi)}_{q}\,\vec{\jmath} + \underbrace{(\psi'\cos\theta + \varphi')}_{r}\,\vec{k}$$

ومنه مركبات شعاع الدوران على الجملة المتماسكة هي : $\vec{\omega}(p, q, r)$

$$p = (\psi'\sin\theta\sin\varphi + \theta'\cos\varphi)$$
$$q = (\psi'\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi)$$
$$r = (\psi'\cos\theta + \varphi')$$

المحل الهندسي للمحور الآني للدوران تحليلياً

في الجملة الثابتة

$$\forall \quad M \in s : \overrightarrow{o_1M} // \vec{\omega}$$

ولتكن $M(x_1, y_1, z_1)$ ومنه من شرط التوازي نجد :

$$\Longrightarrow \frac{x_1}{p_1} = \frac{y_1}{q_1} = \frac{z_1}{r_1}$$

من العلاقات السابقة نحصل على معادلتين وسيطتين للقاعدة وَ بحذف الزمن نحصل على القاعدة .

أما **في الجملة المتماسكة**

$$\forall \quad M \in s : \overrightarrow{oM} // \vec{\omega}$$

ولتكن $M(x, y, z)$ ومنه من شرط التوازي نجد :

$$\Longrightarrow \frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

نحصل على معادلتين وسيطتين للمتدحرج وَ بحذف الزمن نحصل على المتدحرج

مثال : " سؤال دورة "

بين أن زوايا اولر تكفي لتعيين الحركة الدورانية لجسم صلب حول نقطة ثابتة (o)
ثم أوجد مركبات شعاع الدوران الآني على جملة محاور $(ouvk)$.

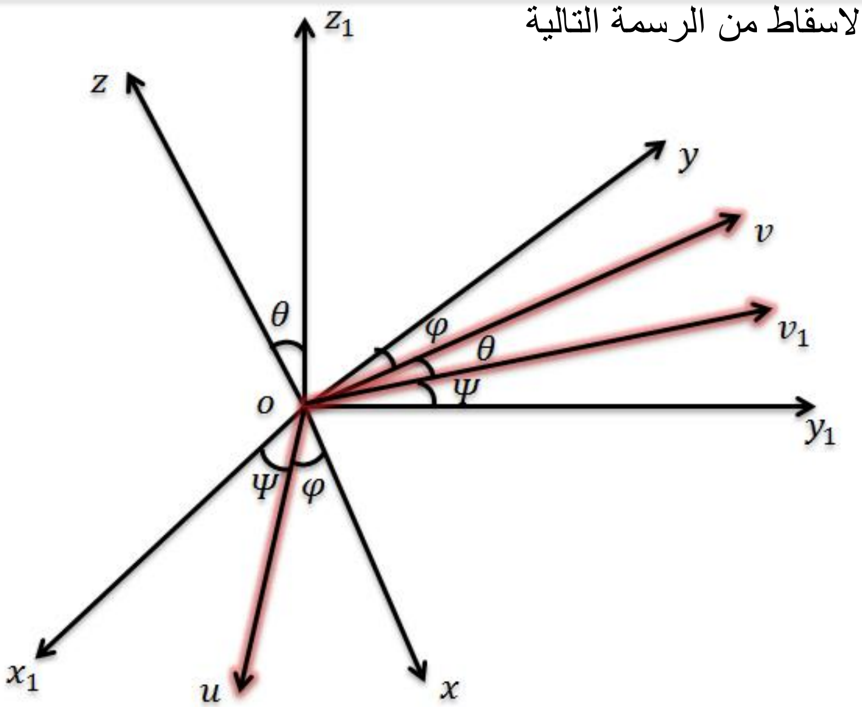
الحل :

الطلب الاول

لدينا العلاقة التي استنتجناها من المحاضرة السابقة

$$ox_1y_1z_1 \underbrace{\xrightarrow{\text{حول دوران } oz_1}}_{\psi} ouv_1z_1 \underbrace{\xrightarrow{\text{حول دوران } ou}}_{\theta} ouvz \underbrace{\xrightarrow{\text{حول دوران } oz}}_{\varphi} oxyz$$

الناتجة عن الاسقاط من الرسمة التالية



الطلب الثاني :

لدينا علاقة شعاع الدوران العامة $\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$

من نص المسألة حدد لنا الجملة التي نريد ان نسقط عليها ((لكن سنستخدم مصفوفات التحويل للسهولة))

أي علينا ايجاد $\overrightarrow{k_1}$ فقط إلى أن تظهر $\vec{v}$ لان لدينا كل من $\vec{k}, \vec{u}$

$$\overrightarrow{k_1} = \sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{k}$$
$$\vec{\omega} = \psi'\sin\theta\,\vec{v} + \psi'\cos\theta\,\vec{k} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$$
$$\vec{\omega} = \theta'\vec{u} + \psi'\sin\theta\,\vec{v} + (\varphi' + \psi'\cos\theta)\vec{k}$$

مسألة

صفيحة بشكل مستطيل تدور حول رأسها الثابت (o) بحيث يبقى ضلعها (oA) ملازماً للمستوي (x_1oy_1) **والمطلوب :**

1) عين الوسطاء التي تعين موضع المستطيل ودرجات حرية الجسم .

2) عين شعاع الدوران الآني .

3) عين معادلات الحركة وذلك بفرض أن : $|\vec{v}(A)| = a$, $|\vec{\omega}| = a$, $|\overrightarrow{oA}| = 2$, $|\overrightarrow{AB}| = 1$

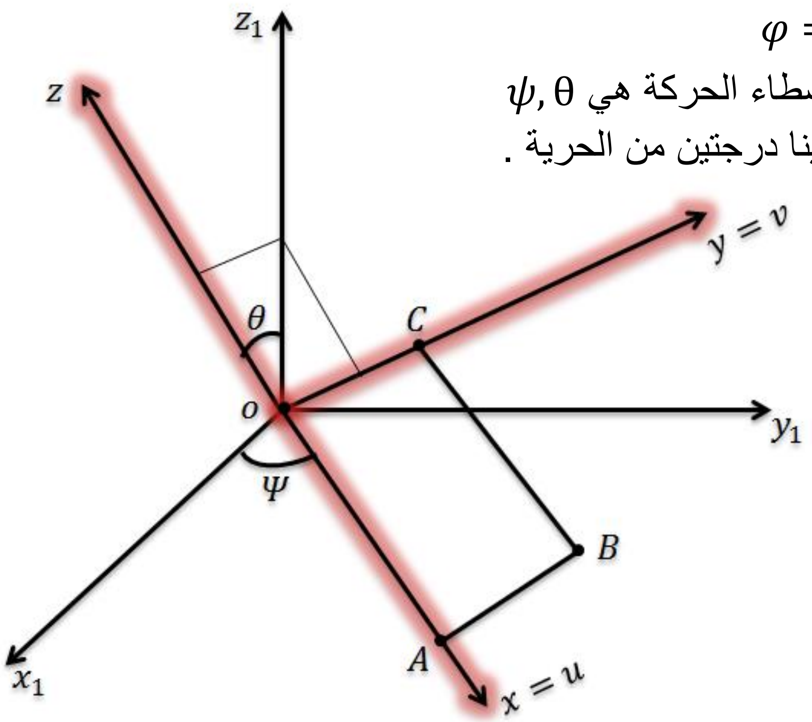
4) عين المحور الآني للدوران والقاعدة والمتدحرج .

الحل

1- نختار جملة ثابتة (o, x, y, z) وجملة متماسكة (o_1, x_1, y_1, z_1) وبما أن الحركة دورانية حول نقطة ثابتة فلدينا ثلاثة وسطاء للحركة ، لكن من نص المسألة (oA) يلازم المستوي الثابت $(o_1x_1y_1)$ عندئذ يكون (oA) منطبق على (ou) ومنه : $ou = ox$ و $ov = oy$ فالزاوية $\varphi = 0$

ومنه وسطاء الحركة هي ψ, θ

ومنه لدينا درجتين من الحرية .



-2 لتعيين $\vec{\omega}$ إما من الجملة الثابتة وتعطينا القاعدة أو من الجملة المتماسكة وتعطينا المتدحرج

ننطلق من العلاقة العامة لشعاع الدوران $\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u}$$

في جملة ثابتة علينا ايجاد المتجه $\vec{u}$ ومنه من مصفوفات التحويل نجد :

$$\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'(\cos\psi\,\vec{\iota_1} + \sin\psi\,\vec{\jmath_1})$$

$$\vec{\omega} = \theta'\cos\psi\,\vec{\iota_1} + \theta'\sin\psi\,\vec{\jmath_1} + \psi'\overrightarrow{k_1}$$

في جملة متماسكة علينا ايجاد المتجه $\overrightarrow{k_1}$

$$\overrightarrow{k_1} = \sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{k}$$

لكن نعلم من انطباق $ou = ox$ و $ov = oy$ أن $\vec{u} = \vec{\imath}$ و $\vec{\jmath} = \vec{v}$ ومنه...

$$\overrightarrow{k_1} = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{\omega} = \psi'\cos\theta\,\vec{k} + \psi'\sin\theta\,\vec{\jmath} + \theta'\vec{\imath}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \theta'\vec{\imath} + \psi'\sin\theta\,\vec{\jmath} + \psi'\cos\theta\,\vec{k}$$

ملاحظة : نوهت الدكتورة انه يجب الرسم مع الاسقاط على المحاور الاحداثية أو كتابة مصفوفة التحويل مع الرسم ايضاً

-3 معادلات الحركة هي :

يجب ايجاد $\theta = \theta(t)$, $\psi = \psi(t)$ وبما أن لدينا $|\vec{v}(A)| = a \ldots (*)$

لذلك نختار الجملة المتماسكة

وبداية لنوجد ψ من علاقة سرعة النقطة A

$$\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oA}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(A) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \theta' & \psi'\sin\theta & \psi'\cos\theta \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(A) = 2\psi'\cos\theta\,\vec{\jmath} - 2\psi'\sin\theta\,\vec{k}$$

$$\xRightarrow{\text{بتربيع}} v^2(A) = 4\psi'^2\cos^2\theta + 4\psi'^2\sin^2\theta$$

$$v^2(A) = 4\psi'^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}$$

نعلم أن

$|\vec{\jmath}|^2 = |\vec{k}|^2 = 1$

بسبب التعامد $\vec{\jmath}.\vec{k} = 0$

$$\xRightarrow{\text{بتعويض في}(*)} \quad a^2 = 4\psi'^2 \Rightarrow \psi'^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow \psi' = \pm\frac{a}{2}$$

نختار الإشارة الموجبة لأن الدوران مباشر

$$\psi' = \frac{a}{2} \overset{\text{بالمكاملة}}{\Longrightarrow} \psi = \frac{a}{2}t + \psi_0$$

نفرض بداية $t = 0\,, \psi = 0$ ومنه $\psi_0 = 0 \Longrightarrow \boxed{\psi = \frac{a}{2}t}$

ايجاد θ من علاقة شعاع الدوران

$$\vec{\omega} = \theta'\vec{i} + \psi' \sin\theta\,\vec{j} + \psi' \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\overset{\text{بتربيع}}{\Longrightarrow} |\vec{\omega}|^2 = {\theta'}^2 + {\psi'}^2 \sin^2\theta + {\psi'}^2 \cos^2\theta$$

$$\Longrightarrow |\vec{\omega}|^2 = {\theta'}^2 + {\psi'}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \Longrightarrow \boxed{|\vec{\omega}|^2 = {\theta'}^2 + {\psi'}^2}$$

من نص المسألة $|\vec{\omega}|^2 = a^2$ ومنه $a^2 = {\theta'}^2 + \frac{a^2}{4}$

$${\theta'}^2 = \frac{3a^2}{4} \Longrightarrow \theta' = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

نختار الإشارة الموجبة لأن الدوران مباشر

$$\Longrightarrow \theta' = \frac{\sqrt{3}}{2}a \overset{\text{بالمكاملة}}{\Longrightarrow} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}at + \theta_0$$

نفرض ببداية الحركة $t = 0\,, \theta = 0 \Longrightarrow \theta_0 = 0$

$$\Longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}at}$$

4- المحور الآني للدوران

في جملة متماسكة

ولتكن $M(x,y,z)$ ، $\forall M \in \Delta : \overrightarrow{oM} // \vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \theta'\vec{i} + \psi' \sin\theta\,\vec{j} + \psi' \cos\theta\,\vec{k}$$

بعد تعويض معادلات الحركة قيمة الزوايا في علاقة شعاع الدوران تصبح

$$\Longrightarrow \vec{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{2}a\vec{i} + \frac{a}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}at\right)\vec{j} + \frac{a}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}at\right)\vec{k}$$

من شرط التوازي $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$

$$\frac{x}{\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}a}_{1}} = \frac{y}{\underbrace{\frac{a}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at}_{2}} = \frac{z}{\underbrace{\frac{a}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at}_{3}}$$

من(1) و (2) نجد :

$$\sqrt{3}y = x\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at \quad \dots(*)$$

من(1) و (3) نجد :

$$\sqrt{3}z = x\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at \quad \dots(**)$$

بتربيع وجمع $(*)$, $(**)$ نجد :

$$\boxed{3y^2 + 3z^2 = x^2}$$

وهي معادلة المتدحرج .

في الجملة الثابتة

$$\forall M \in \Delta : \overrightarrow{oM} // \vec{\omega}$$ ، ولتكن $M(x_1, y_1, z_1)$

$$\vec{\omega} = \theta' \cos\psi \, \vec{\imath_1} + \theta' \sin\psi \, \vec{J_1} + \psi' \vec{k_1}$$

بعد تعويض معادلات الحركة قيمة الزوايا في علاقة شعاع الدوران تصبح

$$\vec{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{2} a \cos\left(\frac{a}{2}t\right) \vec{\imath_1} + \frac{\sqrt{3}}{2} a \sin\left(\frac{a}{2}t\right) \vec{J_1} + \left(\frac{a}{2}\right) \vec{k_1}$$

من شرط التوازي $\frac{x_1}{p_1} = \frac{y_1}{q_1} = \frac{z_1}{r_1}$

$$\underbrace{\frac{x_1}{\frac{\sqrt{3}}{2} a \cos\left(\frac{a}{2}t\right)}}_{1} = \underbrace{\frac{y_1}{\frac{\sqrt{3}}{2} a \sin\left(\frac{a}{2}t\right)}}_{2} = \underbrace{\frac{z_1}{\frac{a}{2}}}_{3}$$

من (1) و (3) نجد :

$$\frac{a}{2} . x_1 = z_1 . \frac{\sqrt{3}}{2} a \cos\left(\frac{a}{2}t\right) \Rightarrow x_1 = z_1 . \sqrt{3} \cos\left(\frac{a}{2}t\right) \dots (*)$$

من (2) و (3) نجد :

$$\frac{a}{2} . y_1 = z_1 . \frac{\sqrt{3}}{2} a \sin\left(\frac{a}{2}t\right) \Rightarrow y_1 = z_1 . \sqrt{3} \sin\left(\frac{a}{2}t\right) \dots (**)$$

بتربيع وجمع $(*)$, $(**)$ نجد :

$$\boxed{y_1^2 + x_1^2 = 3z_1^2}$$

وهي معادلة القاعدة .

انتهت المحاضرة

الألم هو الذي يبقى في القلب، ينير المشاعل في درب الحياة، ويدفع الإنسان إلى البناء بدلاً من اليأس والتدمير

إعداد: محمد علي فليون ** هي حبشية