التحليل التابعي (1)

نظري

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄ المحاضرة: الثالثة عشر   عنوان المحاضرة: الفضاء المنظم

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- التطبيق الايزومتري والفضاءان الايزومتريان
2- تعريف الفضاء المنظم والفضاء المتجهي والفضاء المتجهي الجزئي
3- مولد مجموعة ،الاستقلال والارتباط الخطي وقاعدة وبعد فضاء متجهي

بسم الله الرحمن الرحيم

درسنا في محاضرات سابقة فضاءات تامة وأخرى غير تامة ،إن كل فضاء متري غير تام له متمم مثال ذلك الفضاء $\mathbb{Q}$ غير تام الذي يمكن توسيعه (إتمامه) إلى $\mathbb{R}$

فإذا رغبنا في صياغة مناسبة ودقيقة لهذا الإتمام فإننا سنورد المفهومين التاليين اللذين لهما تطبيقات اخرى مختلفة ومهمة .

- ليكن لدينا $X = (X, d)$, $Y = (Y, \tilde{d})$ فضائين مترين ولدينا التطبيق $T: X \to Y$ عندئذٍ:

أولاً: التطبيق الايزومتري (متساوي المسافات):

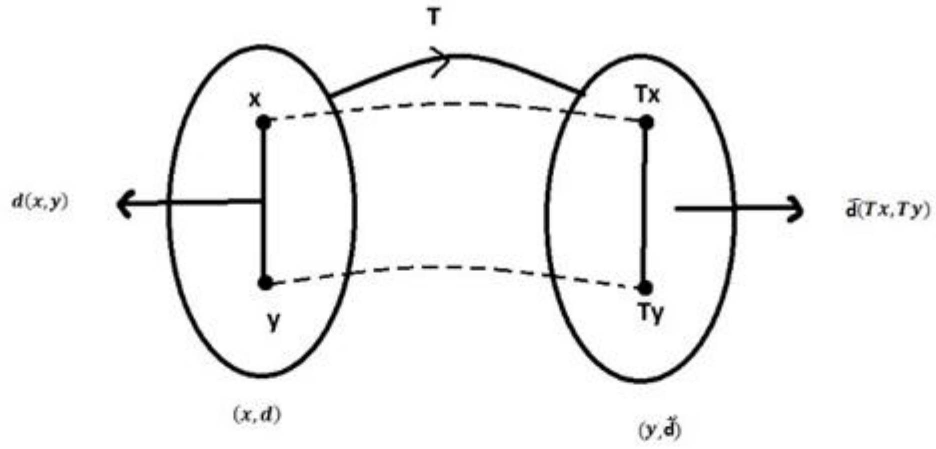
نقول عن التطبيق T انه ايزومتري إذا حافظ T على المسافة أي أنه $d(x, y) = \tilde{d}(Tx, Ty)$

(ومن هنا جاء مصطلح تساوي المسافات)(حيث Tx, Ty صور لكل من x, y وفق T على الترتيب)

ملاحظة: إن كلاً من طرفي المساواة السابقة موجود حيث أن هذه المقارنة تتم في $\mathbb{R}$

ليس بالضرورة أن يكون المترك المعرف على X هو نفسه المعرف على Y.

(شكل توضيحي لفهم التطبيق الايزومتري)



ثانياً الفضاءات الايزومتريان :

نقول عن X , Y أنهما إيزومتريان فيما بينهما إذا وجد تطبيق T إيزومتري وتقابل(غامر ومتباين)

ملاحظة لذا فإن الفضائين الإيزومتريات قد يختلفان على الأكثر بطبيعة عناصرهما ، ولكنه لايمكن تمييز أحدهما عن الأخر من وجهة نظر المترك ، وبالتالي فإنه يمكن اعتبار الفضائين الإيزومتريان متطابقين في أي دراسة لا تُدخل في اعتبار طبيعة عناصرهما .

وبعد هذا يمكننا صياغة مبرهنة الاتمام التي تفيد بإن كل فضاء متري يمكن إتمامه

مبرهنة الإتمام (دون برهان):

يوجد كل فضاء متري $X=(X,d)$ فضاء متري $\hat{X}=(\hat{X},\hat{d})$ يحوي w فضاء جزئي إيزومتري مع X وكثيفاً في $\hat{X}$ $(\overline{w}=\hat{X})$، إن هذا الفضاء $\hat{X}$ وحيد إذا غضضنا الطرف عن الفضاءات الإيزومترية معه، بمعنى أخر إذا كان $\tilde{X}$ فضاء متري تام يحوي فضاء جزئياً كثيفاً $\widehat{w}$ إيزومترياً مع X فإن الفضاء بين $\tilde{X}$، $\hat{X}$ إيزومتريان

((وذلك بالاعتماد على الملاحظة السابقة حيث يمكن اعتبار $\tilde{X}$، $\hat{X}$ منطبقين))

نهاية الفصل الأول.....

الفصل الثاني الفضاءات المنظمة

درسنا في الفصل الأول الفضاءات المترية ورأينا أنها عبارة عن مجموعة غير خالية معرف عليها مترك فإذا أخذنا فضاء متجهي وعرفنا عليه متركاً فاننا سنحصل على الفضاء المنظم

تذكرة :

الفضاء المتجهي : هو مجموعة X تسمى عناصرها متجهات أحياناً مزودة

بعمليتين:
- عملية داخلية : تسمى الجمع يرمز لها$(+)$
- عملية خارجية : وتسمى الضرب بعدد حقيقي$(.)$ أو عقدي

حيث أن عملية الجمع $(+)$ تحقق المساواة التالية :

$1-\quad \forall x,y \in X\ : x+y\in X$

$2-\quad \forall x,y,z \in X\ : x+(y+z)=(x+y)+z$

$3-\quad \forall x,y \in X\ : x+y=y+x$

$4-\quad \forall x \in X\ ;\exists(0)\in X\ ;\quad x+0=0+x=x$

$5-\quad \forall x \in X\ ;\exists(-x)\in X\ ;\quad (x)+(-x)=0$

أما لعملية الضرب ليكن الحقل K مجموعة مجموعة مؤثرات هذا الفضاء فإن عملية الضرب هذه يجب أن تحقق المساواة التالية :

$1-\forall a\in K,\forall x\in X\ : a.x\in X$

$2-\forall a,b\in K\ ;\forall x\in X\ ;(a.b).x=a.(b.x)$

$3-\forall a\in K\ ;\forall x,y\in X\ ;a(x+y)=a.x+b.y$

$4-\forall a,b\in K\ ;\forall x\in X\ ;(a+b).x=a.x+b.x$

$5-1_K.x=x$

إذا كان $K=\mathbb{R}$ يدعى X فضاء متجهي حقيقي.

إذا كان $K=\mathbb{C}$ يدعى X فضاء متجهي عقدي.

الفضاء المتجهي الجزئي : يعرف الفضاء المتجهي الجزئي من X هو مجموعة جزئية غير خالية Y من X بحيث يحقق أنه كان $y_1, y_2 \in Y$ وأيا كان ($\alpha, \beta \in K$مثلا) فإن $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$

(لذا فإن Y هو نفسه فضاء متجهي عملياته هما مقصور العمليتين المعرفتين على X)

ان كلا من X و $\{\emptyset\}$ هي فضاء جزئي خاص من X، حيث يسمى X فضاء جزئي غير فعلي ويسمى كل فضاء جزئي من X ولا يساوي $\{\emptyset\}$ بفضاء جزئي فعلي.

- وتُعرف ***التراكيب الخطية*** للمتجهات $x_1, x_2, \dots \dots, x_n$ من الفضاء المتجهي X هي عبارة عن الشكل $\alpha_1 . x_1 + \alpha_2 . x_2 + \cdots + \alpha_n . x_n$ حيث $\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n$ معاملات (أعداد أو أمثال)

- ***مولد مجموعة :***

إذا كانت M أي مجموعة جزئية غير خالية من X فإن كل التراكيب الخطية لمتجهات M تسمى مولد M ونرمز لها بالشكل $span\ M$

والأن سنورد مفهومين هامين مرتبط أحدهما بالأخر وسنستعمل هذين المفهومين كثيراً في الأبحاث القادمة

(الاستقلال الخطي ، الارتباط الخطي)

يعرف الأستقلال الخطي والارتباط لمجموعة M من المتجهات $x_1, x_2, \dots \dots, x_n$ في فضاء متجهي X عن طريق المعادلة:

$$\alpha_1 . x_1 + \alpha_2 . x_2 + \dots \dots + \alpha_n . x_n = 0$$ ، حيث $(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n)$ معاملات

فإننا نميز حالتين :

A) إذا كانت جميع المعاملات أصفاراً $(\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0)$عندها تكون المجموعة M مستقلة خطياً .

(هندسياً :الأشعة المتعامدة مستقلة خطياً)

B) إذا كانت أحد الأمثال على الاقل لا يساوي الصفر عندها تكون M مرتبطة خطياً (أي الأعداد $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$ ليس جميعا أصفاراً)

(هندسياً : الأشعة المتوازية مرتبطة خطياً)

ملاحظة:

☑ إذا وجد المتجه الصفري في المجموعة M فتكون المجموعة مرتبطة خطيا

☑ تكون المجموعة M مرتبطة خطيا اذا وجد متجه واحد على الاقل يكتب على شكل تركيب خطي للمتجهات الاخرى

وإن مفهومي الأستقلال الخطي والارتباط الخطي يقودنا إلى تعرف قاعدة الفضاء المتجهي وبعده.

أبعاد الفضاء المتجهي : يوجد لدينا قسمين من الفضاءات المتجهية :

فضاءات متجهية منتهية البعد :

ومثال على ذلك $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{C}^n$ وبعد كل منها يساوي n وأيضا P فضاء كثيرات الحدود منته الأبعاد من الدرجة n

فضاءات متجهية غير منتهية البعد :

مثال: الفضاء $C[a,b]$ ، ℓ^2 وفضاءات كثيرات الحدود من أي درجة غير منتهية الأبعاد

قاعدة الفضاء المتجهي : هي عبارة عن جملة من الأشعة المستقلة خطياً التي تولد الفضاء وعدد عناصر هذه القاعدة يساوي بعد الفضاء.

مثلاً الفضاء $\mathbb{R}^2$ هو فضاء شعاعي مولد بالقاعدة $w = \{(1,0),(0,1)\}$

حيث الشعاعين$(1,0),(0,1)$مستقلين خطياً وبعد $\mathbb{R}^2$ يساوي عدد عناصر القاعدة $dim\mathbb{R}^2 = 2$

- أن أي حدود من أي درجة يكتب بدلالة القاعدة $\{1, x, x^2, \dots \dots, x^n \dots\}$.

-إذا كان لدينا $\dim X = n$ وكانت $\{e_1, e_2, \dots \dots, e_n\}$ قاعدة ل X فإنه يوجد لكل $x \in X$ تمثيل وحيد على شكل تركيب خطي لمتجهات القاعدة $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots \dots + \alpha_n e_n$

انتهت المحاضرة