نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة: الثالثة عشر ◄ عنوان المحاضرة: التشاكلات الزمرية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـالتشاكلات الزمرية وخواصها.

٢ـ تأثيرها على العناصر ،وعلى الزمر في المنطلق والمستقر.

٣ـ تأثيرها على الزمر الناظمية.

تعريف :

ليكن G' و G زمرتين و $f : G \to G'$ تطبيق.

نقول ان f تشاكل زمري إذا حقق الشرط :

$$\forall\, a, b \in G \ : \ f\Big(a \underbrace{\cdot}_{\text{معرف على}(G,.)} b\Big) = f(a) \underbrace{\cdot}_{\text{معرف على}(G',.)} f(b)$$

تعريف :

ليكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري نسمي المجموعة :

$$\ker(f) = \{a : \ a \in G \ ; \ f(a) = e'\}$$

نواة التشاكل f حيث e' حيادي الزمرة G' .

دراسة خواص التشاكلات الزمرية:

تمهيدية: ليكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري عندئذ :

١) $f(e) = e'$

٢) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$ فإن $\forall\, a \in G$

٣) $f(a^n) = [f(a))]^n \;;\; a \in G \;,\; \forall\, n \in Z$

٤) $\ker(f)$ تشكل زمرة جزئية ناظمية في G.

البرهان :

١) ليكن $f(e.e) = f(e) \Rightarrow e.e = e$

$$\Longrightarrow f(e).f(e) = f(e)$$

نضرب بمقلوب $f(e)$: $\quad f(e) = e'$

٢) $\forall\, a \in G$ عندئذ: $f(a.a^{-1}) = f(e) = e' \Longrightarrow a.a^{-1} = e$ فإن :

$$f(a).f(a^{-1}) = e'$$

نضرب بمقلوب $f(a)$ نجد :

$$f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$$

٣) ليكن $a \in G$ و $n \in Z$ عندئذٍ:

$$f(a^n) = f\left(\underbrace{a.a\ldots a}_{n\text{مرة}}\right) = \underbrace{f(a).f(a)\ldots f(a)}_{n\text{مرة}} = \big(f(a)\big)^n$$

٤) بما ان $e \in \ker(f)$ و $f(e) = e'$ فإن $\ker(f) \neq \emptyset$

لنبرهن أنها زمرة جزئية أي :

$$a.b^{-1} \in \ker(f)$$

ليكن $a,b \in \ker(f)$ عندئذ $f(a.b^{-1}) = f(a).f(b^{-1})$

$$= f(a).f\big((b)\big)^{-1} = e'.(e')^{-1} = e'$$

ومنه $a.b^{-1} \in \ker(f)$ وبالتالي $\ker(f) \subseteq G$.

لنبرهن أنها ناظمية :

أي $\forall a \in G; a.\ker(f)\,a^{-1} \subseteq \ker(f)$

ليكن $x \in a.ker(f)a^{-1}$ عندئذٍ يوجد $b \in \ker(f)$ حيث $x = a.b.a^{-1} \Rightarrow f(x) =$
$f(a.b.a^{-1})$

$$= f(a).f(b).f(a^{-1}) = f(a).\underbrace{e'}_{\text{لانها من النواة}}.f(a)^{-1} = e'$$

ومنه $x \in \ker(f)$ وبالتالي $a\ker(f)a^{-1} \subseteq \ker(f)$ أي $\ker(f)$ زمرة جزئية ناظمية في G.

تمهيدية : لتكن $f : G \to G'$ تشاكل زمري ولتكن H زمرة جزئية في G عندئذ :

١) $f(H)$ زمرة جزئية في G' .
٢) إذا كانت H دوارة في G فإن $f(H)$ دوارة في G' .
٣) إذا كانت H تبديلية في G فإن $f(H)$ تبديلية في G' .
٤) إذا كانت H ناظمية في G فإن $f(H)$ ناظمية في $Im(f) = f(G)$. (صورة مباشرة)

البرهان :

١) لنعرف المجموعة:

$f(H) = \{f(h) \ : \ \forall \ h \in H \ \}$ إن $e \in H$ وبالتالي:

$$e' = f(e) \in f(H)$$

فإن $f(H) \neq \emptyset$

لنثبت أنها زمرة جزئية في المستقر G' :

ليكن $x, y \in f(H)$ عندئذٍ يوجد $a, b \in H$ حيث $y = f(b)$ و $x = f(a)$

$$x.y^{-1} = f(a).\left(f(b)\right)^{-1} = f(a).f(b^{-1})$$

$$= f\left(\underbrace{a.b^{-1}}_{\in H}\right) \in f(H)$$

$$\Longrightarrow f(H) \text{ زمرة جزئية في } G'$$

٢) لنفرض ان $H =< a >$ حيث $a \in H$ ولنبرهن ان $f(H) =< f(a) >$

لدينا $f(a) \in f(H) \Rightarrow a \in H$ و $f(a) \in < f(a) >$

$$\Rightarrow < f(a) > \subseteq f(H)$$

لنثبت الاحتواء المعاكس: ليكن $y \in f(H)$ عندئذٍ يوجد $h \in H$ بحيث

$y = f(h)$ وان $h = a^n$ حيث $n \in Z$ ومنه:

$$y = f(h) = f(a^n) = \big(f(a)\big)^n \in < f(a) >$$

طالما $\big(f(a)\big)^n$ قوة فهي تنتمي للزمرة المولدة بالعنصر $f(a)$

$$\Rightarrow f(H) \subseteq < f(a) >$$

من الاحتوائين $f(H) = < f(a) >$

٣) بما أن H تبديلية $\forall\, x, y \in H \ : x.y = y.x$

$$\exists \ \ a\ , b \ \in f(H)$$

حيث : $b \in f(H)$ ومنه $b = f(h)$ و $f(x) = a$

ولأن f تشاكل .

$$f(x).f(y) = f(x.y)$$

ولأن H تبديلية :

$$f(x).f(y) = f(x.y) = f(y.x) = f(y).f(x)$$

ومنه فإن $f(H)$ تبديلية.

٤) لنفرض أن H ناظمية في G .

لدينا حسب (١) ان $Im(f)$ زمرة جزئية في G'

وليكن $y \in Im(f)$ لنبرهن ان $y.f(H)y^{-1} \subseteq f(H)$

ان $g \in G \ : y = f(g)$

وليكن $x \in yf(H)y^{-1}$ عندئذٍ : $x = y.b.y^{-1}$ حيث $b = f(h)$ و $h \in H$

ومنه: $x = f(g).f(h).\big(f(g)\big)^{-1} = f(g).f(h).f(g^{-1}) = f(g.h.g^{-1}) \in f(H)$

وهذا يبين ان $f(H)$ ناظمية في $Im(f) = f(G)$.

مبرهنة : ليكن $f : G \to G'$ تشاكلا زمريا ولتكن K زمرة جزئية في G' عندئذ :

١) $f^{-1}(k)$ زمرة جزئية في G

٢) إذا كانت k ناظمية في G' فإن $f^{-1}(k)$ ناظمية في G .

٣) $\ker f = \{e\} \iff f$ متباين .

البرهان:

١) لنعرف المجموعة: $f^{-1}(k)=\{a: a\in G\,, f(a)\in k\}$

ان $f^{-1}(k)\neq\emptyset$ لأن: $f(e)=e'\in k \quad \Rightarrow e\in f^{-1}(k)$

لنبرهن انها جزئية: ليكن $x,y\in f^{-1}(k)$ عندئذٍ فإن :

$$f(x),f(y)\ \in k : x,y\in G \ \Rightarrow x.y^{-1}\in G$$

ويحقق: $f(x.y^{-1})=f(x).f(y^{-1})=f(x).\left(f(y)\right)^{-1}\in K$

وهذا يبين أن $x.y^{-1}\in f^{-1}(k)$ ومنه $f^{-1}(k)$ زمرة جزئية في G .

٢) لنفرض ان k ناظمية في G' ولنبرهن أن:

$$\forall g\in G\,; g.f^{-1}(k).g^{-1}\subseteq f(k)$$

ليكن $x\in g.f^{-1}(k).g^{-1}$ فإنه يوجد $y\in f^{-1}(k)$

حيث $x=g.y.g^{-1}\in G$, $f(g).f(y).\left(f(g)\right)^{-1}\in K$ وإن :

$$f(x)=f(g.y.g^{-1})=f(g).f(y).f(g^{-1})=f\underbrace{(g)}_{\in G'}.f\underbrace{(y)}_{\in k}.\left(f(g)\right)^{-1}$$

طالما k ناظمية في G' وهذا يبين ان:

$$f(x)\in k\ \Rightarrow x\in f^{-1}(k)$$

وبالتالي الزمرة الجزئية $f^{-1}(k)$ ناظمية في G.

٣) " $\Leftarrow$ " لنفرض ان f متباين ليكن $a\in\ker(f)$ عندئذٍ : $a\in G$

$$f(a)=e'=f(e)\ \overset{f\text{ متباين}}{\Rightarrow}\ a=e$$

ومنه كل عنصر في النواة هو المحايد $\Leftarrow \ker(f)=\{e\}$

" $\Rightarrow$ " لنفرض ان $\ker(f)=\{e\}$ ليكن $a,b\in G$ بحيث $f(a)=f(b)$

ولنثبت ان $a=b$ نضرب بمقلوب $f(b)$

$$f(a).\left(f(b)\right)^{-1}=e' \ \Rightarrow f(a).f(b^{-1})=e' \ \Rightarrow f(\underbrace{a.b^{-1}}_{\in G})=e'$$

$$\Rightarrow a.b^{-1}\in\ker(f)=\{e\}$$
$$\Rightarrow a.b^{-1}=e\Rightarrow a=b$$

f متباين $\Longrightarrow$

تمهيدية: لتكن G زمرة عندئذ كل زمرة جزئية ناظمية في G هي نواة لتشاكل زمري غامر .

الاثبات :

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G عندئذ G/H زمرة، ولنعرف العلاقة:

$$\pi : G \to \frac{G}{H}$$

$$\forall\ a \in G\ :\ \pi(a) = aH$$

إن π تطبيق لأنه إذا كان $\forall\ \ a, b \in G\ \ ,\ \ a = b\ ;\ \pi(a) = aH = bH = \pi(b)$

و π تشاكل لأنه حسب تعريف الجداء لزمرة الخارج: $\pi(a.\mathrm{b}) = (a.b)H = (aH).(bH)$

$$= \pi(a).\pi(b)$$

ليكن $d.H\ \in G/H$ عندئذ $\mathrm{d} \in G$

ومنه : $\pi(d) = d.H$ أي ان π غامر.

ولنبرهن أن $\ker\pi = H$: ليكن $x \in \ker\pi$ عندئذ:

$x \in G$ حيث $\pi(x) = x.H = H$(المحايد)

$$\Rightarrow x \in H \Rightarrow \ker(\pi) \subseteq H$$

وليكن $y \in H$ عندئذٍ: $\pi(y) = yH = H$

$$\Rightarrow y \in \ker(\pi)$$

$$\Rightarrow H \subseteq \ker(\pi) \Rightarrow H = \ker(\pi)$$

تعريف: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G نسمي التشاكل

$$\pi : \mathrm{G} \longrightarrow \frac{G}{H}$$

المعرف بالشكل : $a \in G\ :\ \pi(a) = aH$
بالتشاكل القانوني الغامر.

((كل ثانية يوضع امامك اختيار بسيط قد يجعل حياتك كلها مختلفة..

وكل ثانية تختار أن تؤجل القرار خوفاً فتبقى كما أنت، فلا تؤجل بعد الآن(;))

انتهت المحاضرة إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج