◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة الثامنة   عنوان المحاضرة : الاستقلال العشوائي وخواصه

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-مجموعة من التمارين

2-الاستقلال العشوائي

3-خواص الاستقلال العشوائي

تمرين مصنع للأدوية فيه ثلاثة خطوط انتاج , الخط الأول A_1 يسهم في 30% من إنتاج المصنع , ومن ضمن إنتاجه 1% معيب الصنع , الخط الثاني A_2 يسهم في 36% من الإنتاج ومن ضمن إنتاجه 2% معيب الصنع , الخط الثالث A_3 يسهم في 34% من الإنتاج ومن ضمنه إنتاجه 2% معيب الصنع
والمطلوب :

1) احسب احتمال أن تكون العبوة المختارة معيبة الصنع .
2) إذا كانت العبوة المختارة معيبة الصنع فما احتمال أن تكون من إنتاج المصنع الثالث ؟

الحل

B الحدث الدال على أن العبوة معيبة الصنع فإذا فرضنا :

	A_3	A_2	A_1
إنتاج	$P(A_3) = 34\%$	$P(A_2) = 36\%$	$P(A_1) = 30\%$
معيب	$P_{A_3}(B) = 2\%$	$P_{A_2}(B) = 2\%$	$P_{A_1}(B) = 1\%$

نلاحظ أنَّ A_3, A_2, A_1 تشكّل تجزئة لفضاء العينة الممثل بإنتاج المصنع , ونلاحظ أنَّ :

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$$

1) حسب قاعدة الاحتمال المركب :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i).P_{A_i}(B) = P(A_1).P_{A_1}(B) + P(A_2).P_{A_2}(B) + P(A_3).P_{A_3}(B)$$

$$\Rightarrow P(B) = \left(\frac{30}{100}\right).\left(\frac{1}{100}\right) + \left(\frac{36}{100}\right)\left(\frac{2}{100}\right) + \left(\frac{34}{100}\right).\left(\frac{2}{100}\right)$$

$$\Rightarrow P(B) = (0.30).(0.01) + (0.36).(0.02) + (0.34)(0.02) = 0.017$$

وهو احتمال أن تكون العبوة معيبة

2) حسب دستور بايز فإنَّ :

$$P_B(A_3) = \frac{P(A_3).P_{A_3}(B)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i).P_{A_i}(B)} = \frac{0.34 \times 0.02}{0.017} = 0.40$$

وهو احتمال أن يكون الخط الثالث سبب وقوع الحدث B أي أن العبوة معيبة

تمرين في مجتمع من البالغين بلغ نسبة الإصابة بمرض السكري 0.08 واحتمال أن يقرر طبيب معين:
- إصابة شخص بهذا المرض علماً أنه مريض بالفعل 0.95 , واحتمال أن يقرر إصابته علماً أنه غير مصاب بهذا المرض هو 0.02 ما احتمال أن يكون شخص بالغ مريضاً بالسكري علماً أن الطبيب بلغه ذلك؟؟

الحل

نفرض B الحدث الدال على أن الشخص مصاب بمرض سكري , فيكون B' الحدث الدال على عدم إصابته بالسكري $\Rightarrow P(B) = 0.08$

$$\Rightarrow P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.08 = 0.92$$

ويكون A حدث دال على أن الطبيب شَخَصَ الإصابة بالمرض فيكون:

$$P_B(A) = 0.95 \qquad P_{B'}(A) = 0.02$$

احتمال أنه مصاب بالمرض علماً أن الطبيب شَخَصَ ذلك

حسب قاعدة الاحتمال المركب : $P(A) = P(B).P_B(A) + P(B').P_{B'}(A)$ حيث :

أن الحدثين B, B' يشكلان تجزئة ل Ω الحدث الدال على الإصابة أو عدم الإصابة بمرض

$$\Rightarrow P(A) = (0.08)(0.05) + (0.92)(0.02) = 0.0944$$

حسب دستور بايز فإنَّ الاحتمال :

$$P_A(B) = \frac{P(B).P_B(A)}{P(A)} = \frac{(0.08)(0.95)}{0.0944} = \frac{0.076}{0.0944} = 0.81$$

تمرين موظفان يقومان بنسخ الرسائل على آلة كاتبة , فإذا كان الموظف الأول ينسخ 80% من الرسائل و90% رسائله خالية من الأخطاء , والموظف الثاني ينسخ 20% من الرسائل و50% رسائله خالية من الأخطاء , اختيرت عشوائياً أحد الرسائل المنسوخة, **والمطلوب :**
احسب احتمال أن تكون هذه الرسالة خالية من الأخطاء ، وأن كانت هذه الرسالة خالية من الأخطاء
احسب احتمال أن يكون الموظف الثاني هو الذي نسخ هذه الرسالة

الحل

ليكن A_1 الحدث الدال على أن الموظف الأول هو الذي نسخ الرسالة , وليكن A_2 الحدث الدال على أن الموظف الثاني هو الذي نسخ الرسالة , B الحدث الدال على أن الرسالة المختارة خالية من الأخطاء .

نلاحظ أن A_1, A_2 تشكل تجزئة لفضاء العينة Ω الذي هو نسخ الرسالة وذلك لأنَّ :

$$P(A_1) + P(A_2) = 0.80 + 0.20 = 1$$

وحسب قاعدة الاحتمال المركب يكون :

$$P(A) = P(A_1).P_{A_1}(B) + P(A_2).P_{A_2}(B)$$

$$\Rightarrow P(A) = (0.80).(0.90) + (0.20).(0.50) = 0.72 + 0.10 = 0.82$$

احتمال أن تكون الرسالة المختارة خالية من الأخطاء وذلك حسب دستور بايز :

$$P_B(A_2) = \frac{P(A_2).P_{A_2}(B)}{P(B)} = \frac{(0.20)(0.50)}{0.82} = \frac{0.10}{0.82} = 0.122$$

احتمال أن يكون الموظف الثاني هو الذي نسخ الرسالة علماً أنها خالية من الأخطاء .

◄**تنويه** " يوجد أمثلة محلولة بالكتاب مطلوبة وسوف ندرجها فيما بعد بإذن الله "

الاستقلال العشوائي

ليكن (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً ((بحيث : P قياس احتمالي , F جبر تام , Ω فضاء العينة)) :

(1 ليكن A, B حدثين من F نقول إنّهما مستقلان عشوائياً , إذا تحقق مايلي :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

(2 إذا كان A_1, A_2, A_3 أحداث من F نقول عن هذه الأحداث إنّها مستقلة عشوائياً إذا تحقق الشرطان :
أ- الأحداث A_1, A_2, A_3 مستقلة عشوائياً مثنى مثنى فيما بينها .
ب- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)$

3) نقول عن متتالية من الأحداث $(A_i)_{i\geq 1}$ من F **إنها مستقلة عشوائياً** إذا تحقق الشرطان :

أ- كل متتالية جزئية منها من المرتبة $(n-1)$ مستقلة عشوائياً .

ب- $P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

◄ نتائج :

1) من تعريف الاستقلال الاحتمالي نجد أنَّ :

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A).P(B)}{P(A)} = P(B) \;,\; P_B(A) = P(A)$$

2) إذا كان $A \cap B = \emptyset$ (حدثان متنافيان) , فليكونا مستقلان يجب أن يكون :

$P(B) = 0$ أو $P(A) = 0$

$$P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A).P(B) = 0 \Rightarrow P(A) = 0 \vee P(B) = 0$$

أي يجب على الأقل أن يكون أحدهما حدثاً **مستحيلاً**

3) في حال تنافي الأحداث لدينا احتمال الاجتماع يساوي مجموع الاحتمالات .

وفي حال استقلال الأحداث لدينا احتمال التقاطع يساوي جداء الاحتمالات

خواص الاستقلال العشوائي

الأحداث المستقلة عن نفسها هي فقط الأحداث شبه المستحيلة و الأحداث شبه الأكيدة .

البرهان :

من أجل أي حدث $A \in F$ بفرض أنّه مستقل عن نفسه أي :

$$P(\overbrace{A \cap A}^{=A}) = P(A).P(A) \Rightarrow P(A) = P^2(A) \Rightarrow P(A) - P^2(A) = 0$$

$$\Rightarrow P(A).[1 - P(A)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 0 = \text{الحدث شبه المستحيل} \\ P(A) = 1 = \text{الحدث شبه الأكيد} \end{cases}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: منى شغل ** إيناس دليل ** نور مهرة

من قنع من الدنيا باليسير هان عليه كل عسير