نظري

◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄المحاضرة: السابعة

عنوان المحاضرة: الحركة الدورانية للجسم الصلب حول نقطة ثابتة + حل مسائل

ستتابع معكم أصدقائي في هذه المحاضرة حل المسائل التي وردت في المحاضرة السابقة، مع نظرية أولر - دالامبير..

المسألة الأولى

تدور أسطوانة دائرية حول محورها بسرعة زاوية ثابتة $(\omega = 2)$ وينسحب محورها على حامله بسرعة منتظمة $(v = 6)$, المطلوب :

تعيين الخطوة المختزلة للولب (الحركة اللولبية) للأسطوانة, ثم تعيين موضع ومسار وسرعة نقطة من الأسطوانة , احداثياتها بالنسبة لجملة متماسكة مع الأسطوانة هي (2,2,3) .

الحل :

1) نعلم من خواص اللولب الدائري أن $(*)$ ... $s = b\theta$

ولدينا من نص المسألة $\omega = 2\ ,v = 6$

نشتق طرفي العلاقة $(*)$ فنجد :

$$s' = b\theta' \implies \frac{ds}{dt} = b.\frac{d\theta}{dt}$$

$$\implies v = \frac{ds}{dt} = b.\omega$$

$$\implies 6 = b.2 \quad \implies b = 3$$

وهي **الخطوة المختزلة للولب** .

- لإيجاد حركة الأسطوانة يجب إيجاد معادلتها , وبما أن الحركة لولبية فإن وسيطها (θ) ومنه :

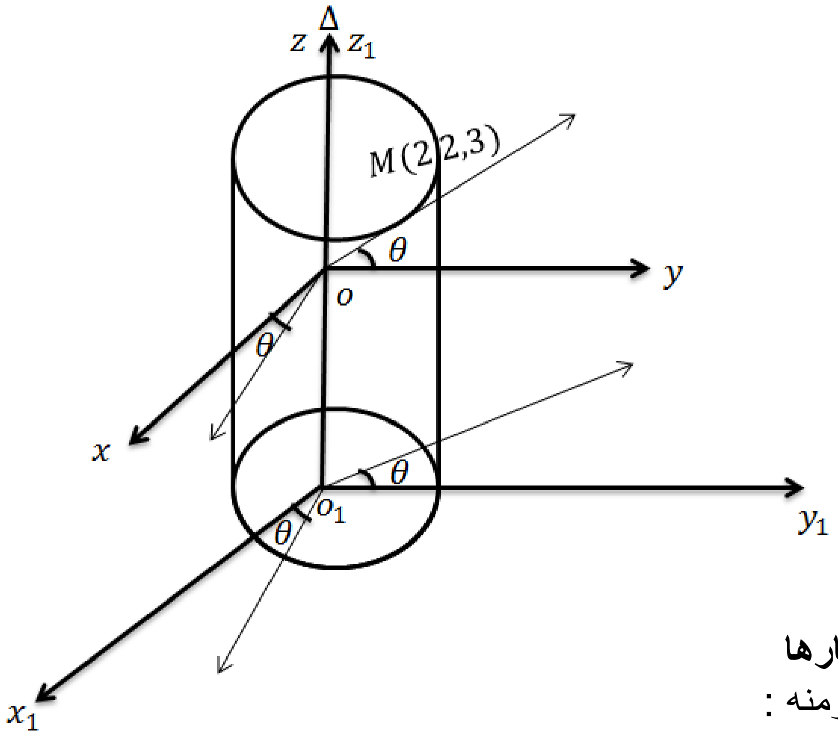
$$\theta' = \omega = 2 \implies \theta = \int \omega dt$$

$$\implies \theta = 2t + \theta_0$$

وبفرض $(\theta_0 = 0)$ في اللحظة الزمنية $(t = 0)$ فنجد :

$$\boxed{\theta = 2t}$$

ملاحظة ((حتى لو لم يذكر لنا إيجاد معادلة الحركة , يجب إيجادها لأننا نستخدمها في باقي طلبات المسألة))



2) تعيين موضع النقطة (M) ومسارها

لدينا احداثيات النقطة بالشكل $(2,2,3)$ ومنه :

$$\forall M \in s: \overrightarrow{o_1M} = \underbrace{(\overrightarrow{o_1o})}_{s} + \overrightarrow{oM} \Rightarrow \overrightarrow{o_1M} = b\theta\vec{k} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{o_1M} = b\theta\vec{k} + 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{o_1M} = 3(2t)\vec{k} + 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{o_1M} = 6t\vec{k} + 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{o_1M} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + (6t+3)\vec{k}}$$

وهي موضع (M) على الجملة المتماسكة .

- لإيجاد المسار يجب الانتقال من الجملة المتماسكة إلى الجملة الثابتة .

- وجدنا سابقا أن :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{i} = cos\theta\vec{i_1} + sin\theta\vec{j_1} \\ \vec{j} = -\sin\theta\vec{i_1} + cos\theta\vec{j_1} \\ \vec{k} = \vec{k_1} \end{array}}$$

حيث $(\theta = 2t)$ ومنه بالتعويض بالعلاقة الأخيرة :

$$\forall M \in s: \overrightarrow{o_1M} = 2(cos2t\vec{i_1} + sin2t\vec{j_1})$$
$$+2(-\sin 2t\vec{i_1} + cos2t\vec{j_1}) + (6t+3)\vec{k_1}$$

وبالتالي بالاسقاط على الجملة الثابتة نجد :

$$x_1 = 2(cos2t - sin2t) \quad ...(1)$$
$$y_1 = 2(\sin 2t + cos2t) \quad ...(2)$$
$$z_1 = (6t+3) \quad ...(3)$$

Syria Math Team

وهي **معادلات حركة** النقطة (M) و**بحذف** (t) من هذه المعادلات نجد **المسار**

ولحذف الزمن (t) نربع العلاقة (1) و (2) ثم نجمع :

$$x_1^2+y_1^2=[2(cos2t-sin2t)]^2+[2(\sin 2t+cos2t)]^2=8$$

$$\boxed{x_1^2+y_1^2=8 \;...(*)}$$

وهي معادلة سطح أسطوانة نصف قطرها $(2\sqrt{2})$ ومحورها (o_1z_1)

ومن العلاقة (3) نجد : $\boxed{t=\frac{z_1-3}{6}}$

وبالتعويض في (1) نجد :

$$x_1=2\left(cos\frac{z_1-3}{3}-sin\frac{z_1-3}{3}\right)\;...(**)$$

فالمسار يتعين من تقاطع كل من $(**)$ و $(*)$ ، ولتعيين سرعة (M) **نعود إلى الجملة المتماسكة** ((حسب الطلب)) وبالتالي :

$$\vec{v}(\mathrm{M})=b\theta'\vec{k}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM}$$

$$\vec{v}(\mathrm{M})=6\vec{k}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&2\\2&2&3\end{vmatrix}\Longrightarrow\boxed{\vec{v}(\mathrm{M})=-4\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}}$$

ولتعيين تسارع (M) على الجملة المتماسكة نطبق القانون التالي :

$$\vec{\Gamma}(\mathrm{M})=b\theta''\vec{k}+\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{oM}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)\quad;\varepsilon=\theta''=0$$

$$\vec{\Gamma}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&2\\-4&4&6\end{vmatrix}\Longrightarrow\boxed{\vec{\Gamma}(\mathrm{M})=-8\vec{i}-8\vec{j}}$$

ملاحظة : لإيجاد السرعة والتسارع في الجملة الثابتة نقوم بالاشتقاق المباشر لمركبات النقطة $M(x_1,y_1,z_1)$.

المسألة الثانية

يتحرك قرص دائري نصف قطره (a) بحركة لولبية حول محوره بسرعة زاوية ثابتة $(\omega=\omega_0)$ علما بأن محور القرص ينتقل بمقدار $(2\omega_0)$ عندما يتم القرص دورة كاملة حول محوره , والمطلوب : تعيين مسار وسرعة نقطة من محيط القرص .

الحل :

هنا لا نملك الخطوة المختزلة لإيجاد المسار , لكن لدينا من **نص المسألة**

((يتم القرص دورة كاملة حول محوره أي أن $B=2\pi b$))

$$\Longrightarrow B=2\pi b=2\omega_0$$

$$\Longrightarrow \ \omega_0 = \pi b \ \Longrightarrow \mathrm{b} = \frac{\omega_0}{\pi}$$

لحساب زاوية الدوران (θ) نقوم بمكاملة (ω) ومنه :

$$\omega = \theta' \Longrightarrow \ \theta = \int \omega dt \quad ; \omega = \omega_0$$

$$\theta = \int \omega_0 dt \ \ \Longrightarrow \ \theta = \omega_0 t + \theta_0$$

من نص المسألة لدينا شروط البدء ومنه نفرض في بداية الحركة أن $(\theta = 0)$في اللحظة $(t = 0)$
بالتعويض نجد أن : $(\theta_0 = 0)$ ومنه $\theta = \omega_0 t$

تعيين موضع (M)

نختار جملة محاور ثابتة (o_1, x_1, y_1, z_1) بحيث ينطبق محور القرص على محور الدوران $(o_1 z_1)$
ونختار جملة محاور متماسكة (o, x, y, z) بحيث ينطبق محور القرص على محور الدوران (oz)
ونختار (M) واقعة على أحد المحاور وليكن (ox), وبكتابة العلاقة الشعاعية للنقطة (M) :

$$\forall \ M \in s: \overrightarrow{o_1 M} = b\theta \vec{k} + \overrightarrow{oM}$$

$$\overrightarrow{o_1 M} = b\theta \vec{k} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \quad \Longrightarrow \ \overrightarrow{o_1 M} \ = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + (b\theta + z)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{o_1 M} \ = x(cos\theta\overrightarrow{\imath_1} + sin\theta\overrightarrow{\jmath_1}) + y(-sin\theta\overrightarrow{\imath_1} + cos\theta\overrightarrow{\jmath_1}) + (b\theta + z)\overrightarrow{k_1}$$

حيث أوجدنا سابقا العلاقات الشعاعية لــ : $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$.

وبالإسقاط على جملة المحاور الثابتة وتعويض $\theta = \omega_0 . t$ نحصل على :

$$x_1 \ = xcos\omega_0 t - ysin\omega_0 t$$
$$y_1 \ = xsin\omega_0 t + ycos\omega_0 t$$
$$z_1 \ = z + b\omega_0 t$$

حيث (x_1, y_1, z_1) مركبات (M)
وبفرض أن $M = (a, 0,0)$, وبالتعويض في معادلات حركة النقطة (M) في الجملة الثابتة :

$$x_1 \ = acos\omega_0 t \ \ ... (*)$$
$$y_1 \ = asin\omega_0 t \ \ ... (**)$$
$$z_1 \ = b\omega_0 t \qquad ... (***)$$

لإيجاد **معادلة المسار** نقوم **بحذف الزمن** من العلاقات السابقة :

من $(***)$ نجد : $\boxed{t = \frac{z_1}{b\omega_0}}$

ولدينا $b = \frac{\omega_0}{\pi}$ ومنه :

$$\boxed{t = \frac{\pi z_1}{\omega_0^2}}$$

وبتعويض قيمة (t) في $(*)$ نجد :

$$x_1 \ = acos\omega_0 \frac{\pi z_1}{\omega_0^2} = acos\frac{\pi z_1}{\omega_0} \quad ... (1)$$

ونعوض أيضا قيمة (t) في $(**)$ نجد :

$$y_1 = asin\omega_0 \frac{\pi z_1}{\omega_0^2} = asin\frac{\pi z_1}{\omega_0} \quad ...(2)$$

وبتربيع العلاقتين (2)و(1) وجمعهما نجد :

$$x_1^2 = a^2\cos^2\frac{\pi z_1}{\omega_0}$$

$$y_1^2 = a^2\sin^2\frac{\pi z_1}{\omega_0}$$

$$\boxed{x_1^2 + y_1^2 = 2a^2 \quad ...(\#)}$$

أي هي معادلة دائرة في المستوي (x_1, y_1, z_1), ومنه **<u>معادلة المسار</u>** هي تقاطع $(\#)$ مع (2)أو(1)

لحساب سرعة النقطة (M) :

نشتق موضع النقطة (M) مباشرة

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = \begin{cases} x_1' = -a\omega_0 sin\omega_0 t \\ y_1' = a\omega_0 cos\omega_0 t \\ z_1' = b\omega_0 \end{cases}$$

ولحساب التسارع للنقطة (M) :

نشتق معادلات السرعة مباشرة

$$\vec{\Gamma}(\mathrm{M}) = \begin{cases} x_1'' = -a\omega_0^2\cos\omega_0 t \\ y_1'' = -a\omega_0^2\sin\omega_0 t \\ z_1'' = 0 \end{cases}$$

الحركة الدورانية للجسم الصلب حول نقطة ثابتة

تعريف

هي حركة جسم صلب ثبتت فيه نقطة واحدة ، ونعلم أنه إذا ثبتت نقطة في جسم صلب فإن للجسم ثلاث درجات من الحرية وبالتالي يوجد ثلاث معادلات حركة .

نظرية أولر_دالامبير >>النظرية الأساسية للحركة الدورانية حول نقطة <<

نص النظرية ((إن حركة الجسم الصلب الدورانية حول نقطة ثابتة هي حركة دورانية في كل لحظة من الزمن حول محور آني مار من هذه النقطة " نسميه المحور الآني للدوران "))

أو **<u>بمعنى آخر</u>** : إذا ثبتنا في الجسم نقطة ما فإنه في كل لحظة يوجد مستقيم من الجسم يمر من تلك

Syria Math Team

النقطة سرع نقاطه معدومة في اللحظة المذكورة .

الإثبات : " هدفنا إيجاد مستقيم سرع نقاطه معدومة "

ليكن (S) جسم صلب ولتكن (o) نقطة ثابتة فيه ولتكن $A, B \in S$ بحيث النقاط الثلاث لا تقع على مستوٍ واحد .

ولنفرض كلاً من **(1) و (2) و (3)....**

(1) $\vec{v}(B) \neq \vec{0}$, $\vec{v}(A) \neq \vec{0}$ في اللحظة الزمنية t

لأنه لو كانت $\vec{v}(A) = \vec{0}$ و (o) نقطة ثابتة لكان (oA) محور آني للدوران ((وبالتالي كانت النظرية محققة في تلك اللحظة))

أيضا $\vec{v}(B) \neq \vec{0}$ لأنه لو كانت $\vec{v}(B) = \vec{0}$ و (o) نقطة ثابتة لكان (oB) محور آني للدوران ((وبالتالي كانت النظرية محققة في تلك اللحظة))

(2) إن $\vec{v}(A) \neq \vec{v}(B)$ لأنه لو كان $\vec{v}(A) = \vec{v}(B)$ لكانت الحركة انسحابية ((وهذا غير ممكن لان (o) ثابتة)) أي هذا يناقض كون الحركة دورانية حول النقطة **" حسب نص المبرهنة "** ومنه $\vec{v}(A) \neq \vec{v}(B)$.

(3) $\vec{v}(A) \nparallel \vec{v}(B)$ لأنه لو كان $\vec{v}(A) \parallel \vec{v}(B)$ عندئذ سيصبح لدينا شعاعين متوازيين وغير متساويين حسب الفرض (2) عندها نظرية المساقط ستكون غير محققة ويكون الجسم ليس صلبا وهذا يناقض كون A, B من جسم صلب ومنه $\vec{v}(A) \nparallel \vec{v}(B)$.

ومنه الشروط الثلاث السابقة محققة .

والآن **لنناقش المبرهنة** ولنأخذ النقطتين o, A **ونطبق نظرية المساقط** على النقطتين :

$$proj_{oA}.\vec{v}(A) = proj_{oA}\vec{v}(o)$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(A).\left|\overrightarrow{oA}\right| = \vec{v}(o).\left|\overrightarrow{oA}\right|$$

ولدينا $\vec{v}(o).\left|\overrightarrow{oA}\right| = \vec{0}$ لان سرعة النقطة o معدومة حسب نص النظرية .

ومنه $\vec{v}(A).\left|\overrightarrow{oA}\right| = \vec{0}$

$$\Longrightarrow \vec{v}(A) \perp \overrightarrow{oA} \qquad \Longrightarrow \vec{v}(A) = \begin{cases} \vec{0} & \text{وهذا يخالف الفرض} \\ \perp \overrightarrow{oA} \end{cases}$$

وأيضا نطبق نظرية المساقط على النقطتين o, B عندئذ :

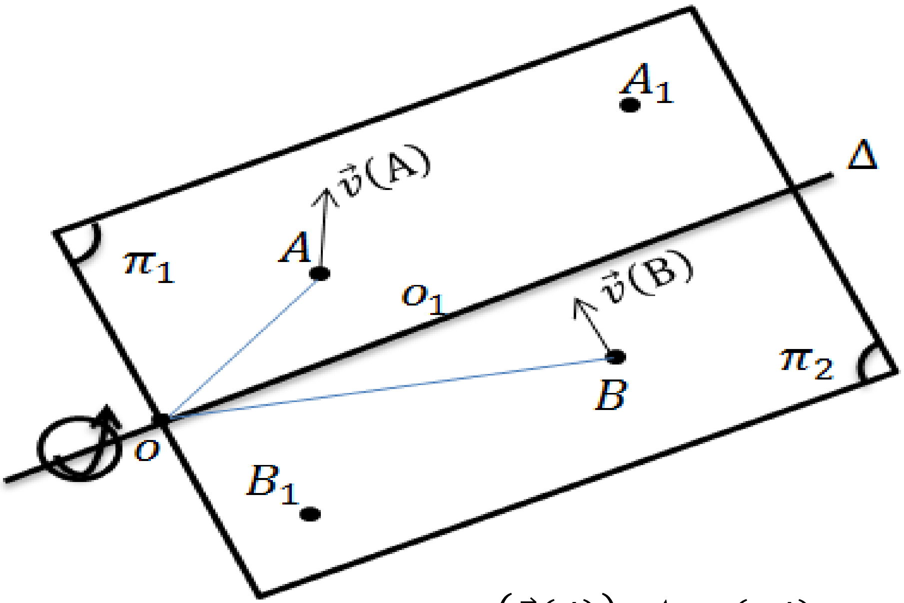
$$proj_{oB}.\vec{v}(B) = proj_{oB}.\vec{v}(o)$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(B).\left|\overrightarrow{oB}\right| = \vec{v}(o).\left|\overrightarrow{oB}\right|$$

ولدينا $\vec{v}(o).\left|\overrightarrow{oB}\right| = \vec{0}$ كما سبق في oA .

ومنه $\vec{v}(B).\left|\overrightarrow{oB}\right| = \vec{0}$

$$\Longrightarrow \vec{v}(B) = \begin{cases} \vec{0} & \text{وهذا يخالف الفرض} \\ \perp \overrightarrow{oB} & \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v}(B) \perp \overrightarrow{oB}$$



نمرر مستويين

(π_1) يمر من (o) ويحوي (oA) ويعامد $(\vec{v}(A))$

(π_2) يمر من (o) ويحوي (oB) ويعامد $(\vec{v}(B))$

ولنأخذ $(B_1 \in \pi_2)$ ، $(A_1 \in \pi_1)$

(1) نطبق نظرية المساقط على سرعتي النقطتين (o, A_1)

$$proj_{oA_1}.\vec{v}(A_1) = proj_{oA_1}.\vec{v}(o)$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(A_1).\left|\overrightarrow{oA_1}\right| = \vec{v}(o).\left|\overrightarrow{oA_1}\right| = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(A_1) = \begin{cases} \vec{0} & \text{إما} \\ \perp \overrightarrow{oA_1} & \text{أو} \end{cases}$$

(2) نطبق نظرية المساقط على سرعتي النقطتين (A, A_1)

$$proj_{AA_1}.\vec{v}(A) = proj_{AA_1}.\vec{v}(A_1)$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(A).\left|\overrightarrow{AA_1}\right| = \vec{v}(A_1).\left|\overrightarrow{AA_1}\right| = \vec{0}$$

ولكن لدينا (AA_1) من المستوي الأول " فرضا " فهي تحقق أنه يمر من النقطة (o) ويحوي $\vec{v}(A) \perp \left|\overrightarrow{oA}\right|$ فأصبح لدينا $\vec{v}(A) \perp \left|\overrightarrow{AA_1}\right|$

$$\Longrightarrow \vec{v}(A_1) = \begin{cases} \vec{0} & \text{إما} \\ \perp \overrightarrow{AA_1} & \text{أو} \end{cases}$$

نستنتج من **(1)** و **(2)** ان :

$$\vec{v}(A_1) = \begin{cases} \vec{0} & \text{إما} \\ \perp \left(\overrightarrow{AA_1} \cap \overrightarrow{oA_1}\right) = \pi_1 & \text{أو} \end{cases}$$

وبنفس الطريقة نجد أن :

$$\vec{v}(B_1) = \begin{cases} \vec{0} & \text{إما} \\ \perp \left(\overrightarrow{AB_1} \cap \overrightarrow{oB_1}\right) = \pi_2 & \text{أو} \end{cases}$$

وبما أن $\vec{v}(A) \nparallel \vec{v}(\mathrm{B}) \Leftarrow \pi_1 \nparallel \pi_2$

وبما أن المستوي (π_1) والمستوي (π_2) كل منهما يمران من النقطة (o) فيوجد فصل مشترك لهما وليكن (Δ) ولنبرهن أن سرع نقاط هذا الفصل المشترك تكون **معدومة** .

ولنأخذ الآن o_1 نقطة ما من المستقيم Δ $((\ o_1 \in \Delta\ ))$

$$\mathbf{(1)}\quad o_1 \in \pi_1 \implies \vec{v}(o_1) = \begin{cases} \vec{0} \\ \perp \pi_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{(2)}\quad o_1 \in \pi_2 \implies \vec{v}(o_1) = \begin{cases} \vec{0} \\ \perp \pi_2 \end{cases}$$

من $\mathbf{(1)}$ و $\mathbf{(2)}$ نجد :

$$\vec{v}(o_1) = \begin{cases} \vec{0} & \text{إما} \\ \perp (\pi_1 \cap \pi_2\ ) & \text{أو} \end{cases}$$

إن حالة $\vec{v}(o_1) \perp (\pi_1 \cap \pi_2\ )$ مرفوضة لأنه لا يمكن لشعاع أن يعامد مستويين متقاطعين بآن واحد ومنه : $\vec{v}(o_1) = \vec{0}$

أي أن **سرع نقاط الفصل المشترك معدومة** .

انتهت المحاضرة

احذر.... اللّئيم إذا أكرمته، والرّذل إذا قدّمته، والسّفيه إذا رفعته .

إعداد: محمد علي فليون ** لمى حبشية

Syria Math Team