◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄المحاضرة: السابعة		عنوان المحاضرة: التقارب المنتظم ومبرهنات

لقد قمنا في المحاضرة السابقة بتناول بعض المبرهنات وإثباتها وإغناء أفكارها بالأمثلة المناسبة وسنتابع اليوم في هذا الأمر

تناولنا في المحاضرة السابقة المبرهنة 2 والتي تنص على :

لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ مستمرة ومعرفة على المجال المغلق $\mathbb{S} = [a,b]$

وبفرض أن هذه المتتالية متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$ من تابع النهاية $f(x)$ عندئذٍ

التابع $f(x)$ قابل للمكاملة على $\mathbb{S}$ ويحقق العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad : \quad \frac{\varepsilon}{b-a} > 0\,,\varepsilon > 0$$

$$\left|\underbrace{\int_a^b f_n(x)dx}_{\text{الحد العام}} - \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{النهاية}}\right| < \varepsilon$$

◄**ملاحظة** : إن شرط التقارب المنتظم في المبرهنة 2 هو شرط كافٍ وغير لازم لنأخذ مثالاً على ذلك

مثال : ادرس تحقق شرط المبرهنة 2 والنتيجة لمتتالية التوابع $\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) = \frac{n\,x}{1+n^2x^2}$

حدود المتتالية هي توابع مستمرة على $[0,1]$ فنأخذ نهاية $f_n(x)$ عندما $n \to \infty$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

نجد أن النتيجة من المبرهنة 2 محققة لأن

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2x}\ln(1+n^2x^2)\right]_0^1$$

ضربنا و قسمنا عل2وكاملنا

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(1+n^2)}{2n}\right] = 0$$

عوضنا حدود التكامل

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

من المبرهنة 2 الشرط محقق.

هل متتالية التوابع متقاربة بانتظام ؟

نفرض أن $f_n(x)$ متقارب بانتظام من التابع $f(x) = 0$ ، نأخذ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ يوجد عدد $N_0 \neq 0$

بحيث $n \geq N_0$ ويتحقق $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^2x^2} - 0\right| = \frac{1}{1+n^2x^2} < \frac{1}{2}$

نناقش : $\frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{2} \dots\dots\dots (1)$

$$n > N_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} < 1$$

نأخذ $x = \frac{1}{n} \in [0,1]$ هل تحقق المتراجحة (1) : من أجل $x = \frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{2}$$

وهذا غير محقق وبالتالي التقارب غير منتظم .

◄توضيح :

*بما أن n عدد طبيعي و N_0 عدد طبيعي فإن $\frac{1}{N_0}, \frac{1}{n}$ حكماً مقداران أصغر من الواحد

*أخذنا من أجل $x = \frac{1}{n} \in [0,1]$ وعوضناها في المتراجحة (بدل كل x ب $\frac{1}{n}$) فيصبح لدينا :

$$\frac{n\left(\frac{1}{n}\right)}{1+n^2\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

*عندما نريد أن نثبت أن متتالية التوابع غير متقاربة بانتظام نتبع التالي :

نفرض أنها متقاربة بانتظام على المجال $\mathbb{S}$ ومن ثم نضع تعريف التقارب المنتظم ونختار قيمة ل ε لا تحقق التعريف من أجل كل قيم x نختار قيمة ل x بشكل عام من المجال $\mathbb{S}$ ونعوضها في متراجحة التعريف فنحصل على تناقض وهذا يعني أن المتتالية المعطاة غير متقاربة بانتظام

مبرهنة 3 :

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع معرفة على $[a,b]$ لنفرض أنها متقاربة نقطياً على $[a,b]$ من $f(x)$ ونفرض أن حدودها توابع قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ بالنسبة لـ x وأن المشتقات $f_n'(x)$ لحدودها هي توابع مستمرة على $[a,b]$ وبفرض $\{f_n'(x)\}$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$ من التابع $g(x)$ عندئذٍ يكون التابع $f(x)$ قابلاً للاشتقاق على $[a,b]$ ومشتقه هو $g(x)$ ويتحقق:

$$\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]' = f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x)$$

البرهان :

حسب شروط المبرهنة(1) نجد أن $g(x)$ تابع مستمر فهو قابل للمكاملة على المجال $[a,b]$ و

$G(x)$ التابع الأصلي لـ $g(x)$ $\qquad \forall\, x \in [a,b]$

$$G(x) - G(a) = [G(t)]_a^x = \int_a^x g(t)dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty} [f_n(t)]_a^x$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(a)$$

$$G(x) - G(a) = f(x) - f(a)$$

$$f(x) = G(x) - G(a) + f(a)$$

نشتق هذه العلاقة: $\Longrightarrow f'(x) = G'(x) = g(x)$

تنويه : $f(a)$ و$G(a)$ ثوابت مشتقاتها صفر.

اذاً $f(x)$ قابلاً للاشتقاق على $[a,b]$ و مشتقه هو $g(x)$

◄**ملاحظة** : إن شرط التقارب المنتظم للمتتالية $\{f_n'(x)\}$ هو شرط لازم وغير كافٍ

مبرهنة 4 (دون برهان) : لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع مستمرة على مجال $\mathbb{S}$ ولنفرض أن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

عندئذٍ تكون القضيتين الآتيتين متكافئتين:

١) المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من الدالة $f(x)$ على $\mathbb{S}$

٢) $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ حيث $M_n = \sup_{x\in\mathbb{S}}|f_n(x) - f(x)|$ من أجل $n \geq N$

أي أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المتتالية متقاربة بانتظام هو أن تكون هذه النهاية تساوي الصفر أي أن تكون نهاية الـ sup للفرق بين $f_n(x)$ و $f(x)$من أجل كل قيمة x من $\mathbb{S}$ تساوي الصفر.

تذكرة: الـ supremum هو أصغر حد أعلى (الحد الأعلى الأصغري).

نقول عن $\mathrm{b} \in \mathbb{R}$ أنه أعلى حد أصغري للمجموعة A إذا تحقق الشرطان:

$$1)\ \forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{x} \leq \mathrm{b}$$

$$2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \mathrm{z} \in \mathrm{A}\, ;\, \mathrm{z} > \mathrm{b} - \varepsilon$$

مثال: لتكن $\{f_n(x)\}$متتالية التوابع حيث: $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ معرفة على $\mathbb{S} = [0,\infty[$

ادرس التقارب المنتظم .

لنوجد: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx+1} = 0$

$$M_n = sup_{x\in\mathbb{S}=[0,\infty[}|\mathrm{f_n}(x) - \mathrm{f}(x)|$$

$$sup_{x\in\mathbb{S}=[0,\infty[}\left|\frac{1}{nx+1}\right| = 1$$

فهي غير متقاربة بانتظام . $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} M_n = 1 \neq 0$

تذكرة: ان الرمز sup يعني أصغر حد أعلى أي اذا كانت المجموعة محدودة من الأعلى فإننا نرمز ب sup لأصغر حد أعلى لهذه المجموعة من المبرهنة السابقة $|\mathrm{f_n}(x) - \mathrm{f}(x)|$ هي مجموعة فاذا كان نهاية أصغر حد أعلى لهذه المجموعة هو الصفر فان المتتالية $\{f_n(x)\}$ تكون متقاربة بانتظام من التابع f(x) وذلك $\forall x \in \mathbb{S}$.

وفي المثال السابق تكون أكبر قيمة للمقدار $\left|\frac{1}{nx+1}\right|$ هي عندما $x = 0$ وهي 1 وتمثل ال sup

مبرهنة 5 (دون برهان) :

لتكون متتالية التوابع $\{\mathrm{f_n}(x)\}$ المعرفة على المجال $\mathbb{S}$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

مهما كان $\varepsilon > 0$ يوجد $\mathrm{N_0} \neq 0$ بحيث $|\mathrm{f_n}(x) - \mathrm{f}_m(x)| < \varepsilon$ لأجل $m > n \geq N_0$, $\forall x \in \mathbb{S}$

مثال: ادرس تقارب متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $0 = \frac{x^n}{n} = \mathrm{f_n}(x)$ المعرفة $\mathbb{S} = [0,1]$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{f_n}(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n} = 0$$

المتتالية متقاربة نقطيا من *f(x)=0* ندرس التقارب المنتظم .

$\forall\ \varepsilon > 0$ يوجد $\mathrm{N_0} \neq 0$ بحيث يكون :

$$|\mathrm{f_m}(x) - \mathrm{f_n}(x)| = \left|\frac{x^m}{m} - \frac{x^n}{n}\right| \leq \left|\frac{x^m}{m}\right| + \left|\frac{x^n}{n}\right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{2}{n}$$

$$|\mathrm{f_m}(x) - \mathrm{f_n}(x)| < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N_0} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow N_0 > \frac{2}{\varepsilon}$$

فالتقارب هو تقارب منتظم حسب المبرهنة 5.

◄**توضيح** : *إن $\frac{1}{m} > \frac{x^m}{m} , \frac{1}{n} > \frac{x^n}{n}$ وذلك لأن أكبر قيم x هو $x = 1$ حيث أن $x \in [0,1]$

*إن: $m > n$ وهذا يعني أن : $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$

ومنه فإن : $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$

مبرهنة 6 (دون برهان) : (اختبار ديني):

تكون متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ المستمرة على المجال $[a,b]$ وبفرض أنها متقاربة نقطياً من التابع $f(x)$ على $[a,b]$ وبفرض $f(x)$ تابع مستمر على $[a,b]$ و $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ اعتباراً من قيمة ما ل n عندئذ تكون المتتالية متقاربة بانتظام من $f(x)$ على المجال $[a,b]$

مثال: $\mathbb{S} = [0,\pi]$ $\quad f_n(x) = \frac{1}{n}\sin x$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{n} = 0$$

$f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$ هو تابع مستمر على $[0,\pi]$ وتابع $f(x) = 0$ تابع مستمر على $I = [0,\pi]$

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{n} \geq \frac{\sin x}{n+1} = f_{n+1}(x)$$

حسب ديني نجد أن المتتالية متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$.

تصحيح خطأ في المحاضرة الرابعة صفحة 4

الخطأ: .... $\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}}}$

التصويب :

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}}}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد أنس القزاز - عبد الكريم دباجة - لانا شهاب