نظري

◄ دكتور المادة : حمزة الحاكمي

◄ المحاضرة :الرابعة عشر ◄ عنوان المحاضرة :التشاكلات الزمرية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتعريف التماثل.

٢ـ مبرهنات التماثل.

٣ـ أحد اهم تطبيقات التماثل (مبرهنة)

تعريف: ليكن $f: G \longrightarrow G'$

تشاكل زمري ،نقول ان f تماثل اذا كان متباين و غامر .

- في هذه الحالة نقول ان الزمرتين G و G' متماثلتين. ونرمز لذلك $G \cong G'$

ملاحظة: لتكن G و G' زمرتين و $f: G \longrightarrow G'$ تشاكل. $((homomorphism))$

- إذا كان f متباين نسمي f مونومورفيزم $((monomorphism))$
- إذا كان f غامر نسمي f ايبومورفيزم $((epomorphism))$
- إذا كان f تقابل (تماثل) نسمي f ايسومونفيزم $((Isomonphism))$
- إذا كان $G = G'$ نسمي f إندومورفيزم $((endomorphism))$
- إذا كان f تقابل و $G = G'$ نسمي f أتومورفيزم $((Automorphism))$ ((تماثل ذاتي))

مبرهنات التماثل :

- مبرهنة التماثل الأولى:

ليكن $f : G \to G'$ تشاكلاً زمرياً عندئذ :

١) $G/\ker(f) \cong Im\,(f) = f(G)$

٢) إذا كان f غامر فإن : $G' \cong G/\ker(f)$.

الاثبات :

(لنثبت ان هناك تطبيق من $\varphi: G/ker(f) \cong G'$)

١) اذا كانت $\ker f$ زمرة جزئية ناظمية في G فإن زمرة الخارج $G/\ker f$ معرفة .
لنعرف العلاقة

$$\varphi : \frac{\mathrm{G}}{\ker f} \to Im(f)$$

بالشكل الاتي :

$$\forall\, x.\ker(f) \in G/\ker f : x \in G$$

$$\Rightarrow \varphi\,(x.ker(f)) = f(x) \in f(G)$$

ليكن :

$$x.ker(f)\ ,y.ker(f) \in G/\ker f \quad : \quad x.ker(f) = y.ker(f)$$

عندئذٍ: $x, y \in G$ نضرب بمقلوب احدى العنصرين وليكن $y.ker(f)$

$$\Rightarrow (x.\ker(f)).(y.\ker(f))^{-1} = \ker(f)$$

$$(x.\ker(f)).(y^{-1}.\ker(f)) = \ker(f)$$

$$\Rightarrow x.\ker(f).y^{-1}.\ker(f) = \ker(f)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x.y^{-1})}_{\in G}\ker(f) = \ker(f)$$

$$\Rightarrow x.y^{-1} \in \ker(f)$$

$$f(x.y^{-1}) = e'$$

$$f(x).f(y^{-1}) = e'$$

$$f(x).\big(f(y)\big)^{-1} = e'$$

$$f(x) = f(y)$$

$$\varphi \text{ حسب تعريف } \Rightarrow \varphi(x.\ker(f)) = \varphi(y.\ker(f))$$

اذا φ تطبيق. وكذلك φ تشاكل لأن:

$$\varphi(x.\ker(f)).(y.\ker(f)) = \varphi\big((x.y).\ker(f)\big) = f(x.y)$$

$$= f(x).f(y) = \varphi(x.\ker(f)).\varphi(y.\ker(f))$$

ان φ متباين لانه اذا كان : $\varphi(x.\ker(f)) = \varphi(y.\ker(f))$

$$\Rightarrow f(x) = f(y)$$

$$\Rightarrow f(x).\big(f(y)\big)^{-1} = e'$$

$$f(x).f(y^{-1}) = e'$$

$$f\left(\underbrace{x.y^{-1}}_{\in G}\right) = e'$$

$$\Rightarrow x.y^{-1} \in \ker(f)$$

ومنه يوجد $t \in \ker(f)$ بحيث $t = x.y^{-1}$

$$x = t.y \in \ker(f).y = y.\ker(f)$$

مرافقة يمينية نفسها يسارية لأنها ناظمية.

$$\Rightarrow x \in x.\ker(f)$$

ومنه $\quad x.\ker(f) = y.\ker(f)$

ومنه φ متباين. وكذلك φ غامر لان:

ليكن $Z \in Im(f) = f(G)$ عندئذٍ يوجد $g \in G$ بحيث $Z = f(g)$ و $g.\ker(f) \in G/\ker(f)$

فإن $\varphi(g.ker(f)) = f(g) = Z$ مما سبق نجد ان φ تماثل ومنه :

$$G/\ker(f) \cong Im(f)$$

٢) لنفرض ان f غامر عندئذٍ $Im(f) = G'$ وحسب (١) نجد ان $G/\ker(f) \cong G'$

مبرهنة التماثل الثانية :

لتكن G زمرة و k,H زمر جزئية في G إذا كانت k ناظمية في G عندئذ فإن :

$$\frac{k.H}{k}=\frac{H.k}{k}=\frac{<k\cup H>}{k}\cong\frac{H}{H\cap k}$$

زمرة تبديلية مولّدة بأجتماع وتحوي k .

البرهان:

لنعرف العلاقة : $\frac{H.K}{k}$ $\varphi : H \to$ بالشكل :

$$\forall\, h \epsilon H \quad ; \quad \varphi(h)=h.k\in k.H/k$$

φ تطبيق لأن : $\forall h_1,h_2\; \epsilon\; H \quad : \; h_1=h_2\, ; h_1k=h_2k$

$$\Rightarrow \varphi(h_1)=\varphi(h_2)$$

φ تشاكل لأن : $\varphi(h_1.h_2)=(h_1.h_2)k=(h_1.k).(h_2.k)=\varphi(h_1).\varphi(h_2)$

و φ غامر لأن: $\forall z\in\frac{kH}{k}; z=g.k \quad : g\in kH$

ومنه يوجد $k\in K$ و $h\in H$ حيث $g=k.h$

$$\Rightarrow Z=g.k=(k.h)K=(k.K)(h.k)=K(h.K)=h.k : h\in H\Rightarrow\varphi(h)$$

$$=h.k=Z$$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى : $\frac{H}{\ker(\varphi)}\cong k.H/k$

- لنبرهن على ان $\ker(\varphi)=k\cap H$

ليكن $a\in\ker(\varphi)$ عندئذٍ $a\in H$ وإن: $\{\varphi(a)=k \Leftarrow a.k=k \Leftarrow a\in k$

$\Leftarrow a\in H\cap k \Leftarrow \ker(\varphi)\subseteq H\cap k$

ليكن $b\in H\cap k$ عندئذٍ $b\in H$ وان $b\in k$ وبالتالي: $\varphi(b)=b.k=k\Rightarrow b\in\ker(\varphi)$

$$\Rightarrow H\cap k\subseteq\ker(\varphi)$$

ومن الاحتوائين نجد ان: $\ker\varphi = H \cap k$ ومنه نجد : $\frac{k.H}{H} \cong \frac{\mathrm{H}}{H \cap K}$.

مبرهنة التماثل الثالثة :

لتكن G زمرة و k, H زمرة جزئية ناظمية في G بحيث $k \subseteq H$ عندئذ :

$$\frac{G/k}{H/k} \cong G/H$$

البرهان:

لنعرف العلاقة : $\varphi: G/k \longrightarrow G/H$ بالشكل: حيث $h \in H \subseteq k.H$

$$\forall g.k \in \frac{G}{k}; \varphi(g.k) = g.H \in G/H$$

ان φ تطبيق لأن: $\forall g_1 k, g_2 k \in G/k$

بحيث $g_1 k = g_2 k$

$$(g_1 k).(g_2 k)^{-1} = k$$

$$(g_1 k).(g_2^{-1} k) = k$$

$$(g_1 . g_2^{-1})k = k \Rightarrow g_1 . g_2^{-1} \in k \subseteq H$$

مولد مرافقة ل H

$$\Rightarrow (g_1 . g_2^{-1})H = H$$

$$(g_1 H)(g_2^{-1} H) = H$$

$$(g_1 H)(g_2 H)^{-1} = H$$

$$g_1 H = g_2 H$$

$$\varphi(g_1 . k) = \varphi(g_2 . k)$$

φ تشاكل لان:

$$\varphi((g_1 . k)(g_2 . k)) = \varphi((g_1 . g_2)k)$$

$$= (g_1 . g_2)H = (g_1 . H)(g_2 . H) = \varphi(g_1 . k).\varphi(g_2 . k)$$

φ غامر لأن: $\forall \bar{z} \in \frac{G}{H}; \bar{z} = zH : z \in G \Rightarrow zk \in G/k$

$$\varphi(zk) = zH = \bar{z}$$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى نجد أن : $(\frac{G}{k})/\ker(\varphi) \cong G/H$

- لنبرهن أن $\ker(\varphi) = H/k$

ليكن $\bar{x} \in \ker(\varphi)$ عندئذٍ $\bar{x} \in G/k$ ومنه $\bar{x} = x.k$ حيث $x \in G$ وان

$$\Leftarrow \begin{cases} \varphi(x.k) = H \\ \varphi(x.k) = x.H \end{cases} x = xH \Leftarrow x \in H \Leftarrow \bar{x} = x.H \in H/k$$

$$\Rightarrow \ker(\varphi) \subseteq H/k$$

- ليكن $d.k \in H/k$ عندئذٍ $d \in H$ وان محايدالمستقر $\varphi(d.k) = d.H = H$

$$\Rightarrow d.H \in \ker(\varphi) \Rightarrow H/k \subseteq \ker(\varphi)$$

من الاحتوائين نجد: $\frac{H}{k} = \ker(\varphi)$

ومنه نجد : $\frac{G}{H} \cong (\frac{G}{k})/(\frac{H}{k})$.

سندرس واحدة من أهم تطبيقات مبرهنة التماثل الأولى و هي الحقيقة التالية.

حيث سندرس العلاقة بين الزمرتين nZ و Z_n من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة : ليكن $n > 1$ عدد صحيح عندئذ $\frac{Z}{nZ} \cong Z_n$

الإثبات :

لنعرف العلاقة :

$$\varphi : Z \to Z_n$$

بالشكل الاتي :

$$\forall\, x \in Z \quad ; \quad \varphi(x) = \underbrace{x \bmod - n}_{\text{باقي قسمة } x \text{ على } n} = r \in Z_n$$

لان $0 \le r < n$: $x = qn + r$ أي أن r وحيدة وموجود في Z_n . وبالتالي

من الواضح أن φ تطبيق لأن: r تتعين بصورة وحيدة في مبرهنة خوارزمية القسمة.

وإن φ تشاكل لأنه إذا كان $x, y \in Z$ فإن :

$$\varphi(x+y) = (x+y)mod - n$$

$$= (x\ mod - n) + (y\ mod - n)$$

$$= \varphi(x) + \varphi(y) \quad \Longrightarrow \quad \varphi \text{ تشاكل}$$

إن φ غامر لأن :

$$\forall\, k \in Z_n \qquad ; \qquad k \in Z\,, 0 \leq k < n$$

نأخذ الصورة المباشرة لـ k :

$$\Rightarrow \varphi(k) = k.mod - n = k$$

وحسب مبرهنة التماثل الأولى فإن

$$\frac{Z}{\ker(\varphi)} \cong Z_n$$

حتى يتم المطلوب يجب ان نبرهن أن $\ker\varphi = nZ$

ليكن $x \in \ker\varphi$ عندئذ $x \in Z$

نأخذ الصورة المباشرة له : $\varphi(x) = 0$ حيادي الجمع

$$\varphi(x) = x.mod - n \Rightarrow x.mod - n = \underbrace{0}_{\text{محايد}}$$

بما ان باقي قسمة x على n هي صفر. فإن x من مضاعفات n ومنه: $x = qn \in nZ \Rightarrow$ $\ker(\varphi) \subseteq nZ$

ليكن $h \in nZ$ عندئذٍ $h = n.m$ حيث $m \in Z$ ومنه $h \in Z$ ومنه :

$$\varphi(h) = h.mod - \mathrm{n} = (n.m)mod - n = 0$$

$$\Rightarrow h \in ker(\varphi)$$

$$\Rightarrow nZ \subseteq ker(\varphi)$$

ومنه :

$$nZ = ker(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{Z}{nZ} \cong Z_n$$

ملاحظة: يمكن التعامل مع عناصر Z_n على انها صفوف تكافؤ..

تذكير: لأجل كل عدد صحيح توجد زمرتين :

١) $nZ = \{m.n : m \in Z\}$ أي مضاعفات n.

٢) $Z_n = \{0,1, \dots ., n-1\}$

انتهت المحاضرة

القوة لا تأتي من المقدرة الجسدية ، انما تأتي من الإرادة التي لا تُقهر..

إعداد: ناريمان جلو – ولاء الأخضر – هلا همج