نظري

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ المحاضرة : التاسعة ◄ عنوان المحاضرة: التشاكلات المستخلصة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- التشاكلات المستخلصة من تشاكل مودولي.

التشاكلات المستخلصة من تشاكل مودولي

تعريف: ليكن M, N مودولين على الحلقة A وليكن $f: M \to N$ تشاكل مودولي وليكن P مودول على الحلقة A عندها يوجد تشاكلين زمريين:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "u"] \arrow[dr, dotted, "fou"'] & M \arrow[d, "f"] \\ & N \end{tikzcd}$$

$$f_*: Hom(P, M) \to Hom(P, N)$$
$$u \to f_*(u) = fou$$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "v"] & P \\ M \arrow[u, "f"] \arrow[ur, dotted, "vof"'] & \end{tikzcd}$$

$$f^*: Hom(N, P) \to Hom(M, P)$$
$$v \to f^*(v) = vof$$

ملاحظة: إنَّ المجموعة $Hom(P, M)$ سوف ننظر لها على أنها زمرة تبديلية ولا ننظر لها على أنها مودول لأنه كي تكون مودول على A يجب أن نضع شرط أنَّ A حلقة تبديلية .
وكي يتحقق الشرط إمّا أن نأخذ الحلقة $\mathbb{Z}$ كونها تبديلية أو نذكر شرط أن A حلقة تبديلية .

مبرهنة : ليكن M, R, N ثلاث مودولات على الحلقة A وليكن $f, g \in Hom(M, N)$ وليكن $h, k \in Hom(N, R)$ عندها فإن :

١) $(hof)_* = h_* o\, f_*$ ٣) $(f+g)_* = f_* + g_*$

٢) $(hof)^* = f^* o\, h^*$ ٤) $(h+k)^* = h^* + k^*$

البرهان

١) ليكن P مودول على A ولدينا

$$\underbrace{M \overset{f}{\to} N \overset{h}{\to} R}_{hof}$$

$$: Hom(P,M) \xrightarrow{f_*} Hom\,(P,N) \xrightarrow{h_*} Hom\,(P,R)$$

$$(hof)_* : Hom(P,M) \to Hom\,(P,R)$$

$$: \quad \forall u \in Hom(P,M)$$

$$(hof)_*(u) \underbrace{=}_{\text{حسب تعريف } (hof)_*} (hof)\,o(u) \underbrace{=}_{\text{لان تركيب التطبيقات تجميعية}} ho(fou) = ho\big(f_*(u)\big)$$

$$= h_*(f_*)(u) = (h_* o f_*)(u) \Longrightarrow (hof)_* = h_* o f_*$$

<u>باقي الطلبات وظيفة (الحل بنفس الطريقة).</u>

مبرهنة : لتكن M, M', M'' مودولات على الحلقة A ولتكن المتتالية التامة:

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \,..(*)$$

ولتكن N مودول على الحلقة A عندئذٍ توجد متتاليتين تامتين:

$$0 \to Hom\,(N,M') \xrightarrow{f_*} Hom(N,M) \xrightarrow{g_*} Hom(N,M'') \;\ldots(1)$$

$$0 \to Hom\,(M'',N) \xrightarrow{g^*} Hom(M,N) \xrightarrow{f^*} Hom(M',N) \ldots(2)$$

ملاحظة : إن g_*, f_*, g^*, f^* تشاكلات مودولية على $\mathbb{Z}$.

البرهان

لنبرهن أنَّ المتتالية (1) تامة ، يجب أن نبرهن أنَّ: $1)$ متباين f_* ، $2)\ Im\, f_* = ker\, g_*$

- إثبات أنَّ f_* متباين :

$$\forall u \in ker\, f_* \Rightarrow u \in Hom\,(N,M') : f_*(u) = \underbrace{0}_{\text{التشاكل صفري}}$$

أي أنه لدينا $N \xrightarrow{u} M'$ بحيث $fou = 0$ (وذلك حسب التعريف)

وحتى يتم المطلوب يجب برهان أن $u = 0$ ولدينا $fou = 0$ ومنه $fou = fo0$

إن f متباين لأن المتتالية * تامة وبالتالي يقبل الاختصار من اليسار ولنثبت ذلك

وبالتالي مهما يكن $n \in N$ فإن $fou(n) = fo0(n) \Longleftarrow f\big(u(n)\big) = f\big(O(n)\big) = f(0)$

بما أن f متباين فإنَّ: $u(n) = 0$ وذلك مهما يكن $n \in N$ وهذا يعني ان $u = 0$

$$ker\, f_* = 0 \iff \text{متباين } f_*$$

- إثبات أن $Im\, f_* = ker\, g_*$. ليكن: $u \in Im\, f_*$ ، عندئذٍ:

$$u \in Hom\,(N,M) : \exists\, v \in Hom\,(N,M')\ ;\ f_*(v) = fov = u$$

ويجب اثبات أن u ينتمي ل $ker\ g_*$ أي أن صورته وفق g_* هي الصفر .

$$g_*(u) = gou = go(fov) \underbrace{=}_{\text{تركيب التطبيقات تجميعي}} (gof)ov$$

وبما أن : $(*)$ متتالية تامة ، فإن : $gof = O$

$$\Rightarrow\ (gof)ov = Oov = O$$

ومنه: $g_*(u) = 0 \Leftarrow u \in ker\ g_*$ ، وبالتالي يكون: $Im\ f_* \subseteq ker\ g_*$

<u>الاحتواء المعاكس :</u> لنبرهن أن : $Im\ f_* \supseteq ker\ g_*$

ليكن: $u \in ker\ g_*$ ومنه يكون $u \in Hom\ (N, M)$ بحيث يحقق $g_*(u) = gou = 0$

وبالتالي بما أن $gou = 0$ فإن $Imf \underbrace{=}_{\text{لان المتتالية *تامة}} kerg \underbrace{\subseteq}_{\text{حسب مبرهنة سابقة}} Imu$

والمطلوب أن نبرهن ما يلي: $f_*(w) = fow = u\ :\ \exists\, w \in Hom(N, M') \Leftrightarrow u \in Imf_*$

سنبني w بحيث يبقى المخطط تبديلي: $w: N \to M'$

$$n \to w(n) = m' \quad : f(m') = u(n)$$

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] & M \\ & N \arrow[u, "u"'] \arrow[ul, dashed, "w"] \end{tikzcd}$$

w تطبيق لأنَّ: $u(n_1) = u(n_2) \underbrace{\Rightarrow}_{u\ \text{تطبيق}} n_1 = n_2\ ;\ \forall\, n_1, n_2 \in N$

وبالتالي: $\exists\, m_1', m_2' \in M'\ : f(m'_1) = u(n_1)\ ,\ f(m_2') = u(n_2)$

وبما أنَّ $u(n_1) = u(n_2)$ فإنَّ: $f(m'_1) = f(m_2')$

وبما أنَّ f متباين فإن $m'_1 = m_2'$ ومنه حسب تعريف w يكون

$$\Rightarrow w(n_1) = w(n_2)$$

اثبات أنَّ w تشاكل: ليكن $n_1, n_2 \in N$ و $\alpha, \beta \in A$ ، عندئذٍ:

$$\exists\ m_1', m_2' \in M'\ : f(m'_1) = u(n_1)\ ,\quad f(m_2') = u(n_2)$$

فيكون:

$$f(\alpha m'_1 + \beta m'_2) \underbrace{=}_{f\ \text{تشاكل}} \alpha . f(m'_1) + \beta . f(m'_2)$$

$$= \alpha.u(n_1) + \beta.u(n_2) \underset{u\text{ تشاكل}}{=} u(\alpha n_1 + \beta n_2)$$

ومنه حسب تعريف w يكون:

$$w(\alpha n_1 + \beta n_2) = \alpha m'_1 + \beta m'_2 = \alpha.w(n_1) + \beta.w(n_2)$$

أي w تشاكل.

أثبتنا أن w تطبيق تشاكل لأننا نريد إثبات أن w ينتمي ل $Hom(N, M')$ وسنثبت أن المخطط تبديلي لأننا نريد اثبات أن $fow = u$. لنثبت أن المخطط تبديلي:

$$\forall\, n \in N \;;\; w(n) = m' \;; f(m') = u(n) \;;\; m' \in M'$$

$$f_*(w(n)) = fow(n) = f(w(n)) = f(m') = u(n)$$

$$\Longrightarrow f_*(w) = u$$

أي الشرط محقق ومنه المخطط تبديلي ، وهكذا حصلنا على التطبيق المطلوب w ومنه يتحقق لدينا الاحتواء: $Im\, f_* \supseteq ker\, g_*$ ، ومن الاحتوائين نجد تحقق المساواة: $Im\, f_* = ker\, g_*$ وبالتالي فإنَّ المتتالية (1) تامة .

(لم نثبت أن $Hom(N, M'')$ حد تام لأنه لم يخرج منه سهم)

انتهت المحاضرة

تنويه : في المحاضرة الخامسة الصفحة الرابعة حل لمبرهنة التماثل الأولى بطريقة ثانية

وخلال البرهان وجدنا أن φ تماثل زمري وهذا صحيح ولكن يجب البرهان على ذلك ويتم البرهان بنفس الطريقة التي تناولنها بمقرر البنى الجبرية ١ .

كلما أدبني الدهر   أراني نقص عقلي
وإذا ما ازددت علما   زادني علما بجهلي

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو التوت – شهد الحايك البوشي