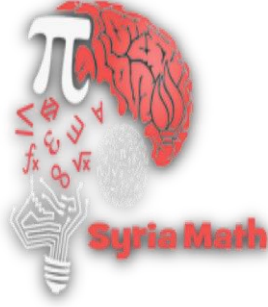


1-11-2017

نظري

◀ دكتورة المادة: نور غازي

◀ المحاضرة: التاسعة ◀ عنوان المحاضرة: التشاكلات المستخلصة



المستوى العلمي: أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١- التشاكلات المستخلصة من تشاكل مودولي.

التشاكلات المستخلصة من تشاكل مودولي

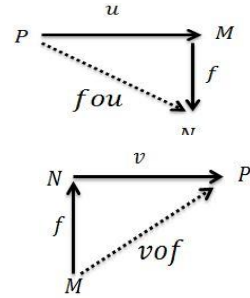
تعريف: ليكن M, N مودولين على الحلقة A وليكن $f: M \rightarrow N$ تشاكل مودولي وليكن P مودول على الحلقة A عندها يوجد تشاكلين زمريين:

$$f_*: \text{Hom}(P, M) \rightarrow \text{Hom}(P, N)$$

$$u \rightarrow f_*(u) = fou$$

$$f^*: \text{Hom}(N, P) \rightarrow \text{Hom}(M, P)$$

$$v \rightarrow f^*(v) = vof$$



ملاحظة: إن المجموعة $\text{Hom}(P, M)$ سوف ننظر لها على أنها زمرة تبديلية ولا ننظر لها على أنها مودول لأنه كي تكون مودول على A يجب أن نضع شرط أن A حلقة تبديلية. وكي يتحقق الشرط إما أن نأخذ الحلقة \mathbb{Z} كونها تبديلية أو نذكر شرط أن A حلقة تبديلية.

مبرهنة: ليكن M, R, N ثلاث مودولات على الحلقة A وليكن $f, g \in \text{Hom}(M, N)$ وليكن $h, k \in \text{Hom}(N, R)$ عندها فإن:

$$(f + g)_* = f_* + g_* \quad (٣) \quad (hof)_* = h_* \circ f_* \quad (١)$$

$$(h + k)^* = h^* + k^* \quad (٤) \quad (hof)^* = f^* \circ h^* \quad (٢)$$

البرهان

$$\underbrace{M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{h} R}_{hof}$$

(١) ليكن P مودول على A ولدينا

$$\begin{aligned} & f_* \quad h_* \\ & : Hom(P, M) \xrightarrow{\cong} Hom(P, N) \xrightarrow{\cong} Hom(P, R) \\ & (hof)_* : Hom(P, M) \rightarrow Hom(P, R) \\ & : \forall u \in Hom(P, M) \end{aligned}$$

$$(hof)_*(u) \stackrel{\text{حسب تعريف } (hof)_*}{=} (hof) \circ (u) \stackrel{\text{لان تركيب التطبيقات تجميعية}}{=} ho(fou) = ho(f_*(u))$$

$$= h_*(f_*)(u) = (h_* \circ f_*)(u) \implies (hof)_* = h_* \circ f_*$$

باقي الطلبات وظيفية (الحل بنفس الطريقة).

مبرهنة: لتكن M, M', M'' مودولات على الحلقة A ولتكن المتتالية التامة:

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0 \dots (*)$$

ولتكن N مودول على الحلقة A عندئذٍ توجد متتاليتين تامتين:

$$0 \rightarrow Hom(N, M') \xrightarrow{f_*} Hom(N, M) \xrightarrow{g_*} Hom(N, M'') \dots (1)$$

$$0 \rightarrow Hom(M'', N) \xrightarrow{g^*} Hom(M, N) \xrightarrow{f^*} Hom(M', N) \dots (2)$$

ملاحظة: إن g_*, f_*, g^*, f^* تشاكلات مودولية على \mathbb{Z} .

البرهان

لنبرهن أن المتتالية (1) تامة، يجب أن نبرهن أن: $Im f_* = ker g_*$ ، 2) متباين f_* ، 1) متباين

$$\forall u \in ker f_* \implies u \in Hom(N, M') : f_*(u) = 0 \quad \text{التشاكل صفري}$$

أي أنه لدينا $N \xrightarrow{u} M'$ بحيث $fou = 0$ (وذلك حسب التعريف)

وحتى يتم المطلوب يجب برهان أن $u = 0$ ولدينا $fou = 0$ ومنه $fou = fo0$

إن f متباين لأن المتتالية * تامة وبالتالي يقبل الاختصار من اليسار ولنثبت ذلك

$$f(u(n)) = f(0(n)) = f(0) \iff fou(n) = fo0(n) \text{ فإن } n \in N \text{ مهما يكن}$$

بما أن f متباين فإن: $u(n) = 0$ وذلك مهما يكن $n \in N$ وهذا يعني ان $u = 0$

$$ker f_* = 0 \iff \text{متباين } f_*$$

- إثبات أن $Im f_* = ker g_*$. ليكن: $u \in Im f_*$ ، عندئذٍ:

$$u \in Hom(N, M) : \exists v \in Hom(N, M') ; f_*(v) = fov = u$$

ويجب اثبات أن u ينتمي لـ $\ker g_*$ أي أن صورته وفق g_* هي الصفر .

$$g_*(u) = gou = go(fov) \stackrel{\text{تركيب التطبيقات تجميعي}}{=} (gof)ov$$

وبما أن $(*)$ متتالية تامة ، فإن $gof = 0$

$$\Rightarrow (gof)ov = 0ov = 0$$

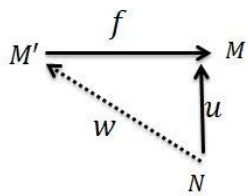
ومنه: $g_*(u) = 0 \Leftarrow u \in \ker g_*$ ، وبالتالي يكون: $Im f_* \subseteq \ker g_*$

الاحتواء المعاكس : لنبرهن أن $Im f_* \supseteq \ker g_*$

ليكن: $u \in \ker g_*$ ومنه يكون $u \in Hom(N, M)$ بحيث يحقق $g_*(u) = gou = 0$

$$Im u \stackrel{\text{حسب مبرهنة سابقة}}{\subseteq} \ker g \stackrel{\text{لان المتتالية *تامة}}{=} Im f$$

والمطلوب أن نبرهن ما يلي: $u \in Im f_* \Leftrightarrow \exists w \in Hom(N, M') : f_*(w) = fow = u$



سنبني w بحيث يبقى المخطط تبديلي:

$$n \rightarrow w(n) = m' : f(m') = u(n)$$

$\forall n_1, n_2 \in N ; n_1 = n_2 \Rightarrow u(n_1) = u(n_2)$ تطبيق u لأن:

وبالتالي: $\exists m'_1, m'_2 \in M' : f(m'_1) = u(n_1) , f(m'_2) = u(n_2)$

وبما أن: $f(m'_1) = f(m'_2)$ فإن: $u(n_1) = u(n_2)$

وبما أن f متباين فإن $m'_1 = m'_2$ ومنه حسب تعريف w يكون

$$\Rightarrow w(n_1) = w(n_2)$$

اثبات أن w تشاكل: ليكن $n_1, n_2 \in N$ و $\alpha, \beta \in A$ ، عندئذ:

$$\exists m'_1, m'_2 \in M' : f(m'_1) = u(n_1) , f(m'_2) = u(n_2)$$

فيكون:

$$f(\alpha m'_1 + \beta m'_2) \stackrel{f \text{ تشاكل}}{=} \alpha \cdot f(m'_1) + \beta \cdot f(m'_2)$$

$$= \alpha \cdot u(n_1) + \beta \cdot u(n_2) \stackrel{\substack{= \\ u \text{ تشاكل}}}{=} u(\alpha n_1 + \beta n_2)$$

ومنه حسب تعريف w يكون:

$$w(\alpha n_1 + \beta n_2) = \alpha m'_1 + \beta m'_2 = \alpha \cdot w(n_1) + \beta \cdot w(n_2)$$

أي w تشاكل.

أثبتنا أن w تطبيق تشاكل لأننا نريد إثبات أن w ينتمي لـ $Hom(N, M')$ وسنثبت أن المخطط تبديلي لأننا نريد إثبات أن $f \circ w = u$. لنثبت أن المخطط تبديلي:

$$\forall n \in N ; w(n) = m' ; f(m') = u(n) ; m' \in M'$$

$$f_*(w(n)) = f \circ w(n) = f(w(n)) = f(m') = u(n)$$

$$\Rightarrow f_*(w) = u$$

أي الشرط محقق ومنه المخطط تبديلي ، وهكذا حصلنا على التطبيق المطلوب w ومنه يتحقق لدينا الاحتواء: $Im f_* \supseteq ker g_*$ ، ومن الاحتوائين نجد تحقق المساواة: $Im f_* = ker g_*$ وبالتالي فإن المتتالية (1) تامة .

(لم نثبت أن $Hom(N, M'')$ حد تام لأنه لم يخرج منه سهم)

انتهت المحاضرة

تنويه : في المحاضرة الخامسة الصفحة الرابعة حل لمبرهنة التماثل الأولى بطريقة ثانية

وخلال البرهان وجدنا أن φ تماثل زمري وهذا صحيح ولكن يجب البرهان على ذلك ويتم البرهان بنفس الطريقة التي تناولناها بمقرر البنى الجبرية ١ .

كلما أدبني الدرر
وأذا ما أزدده كلما
أروي نقص محلي
زادني كلما يجلي

إعداد: لبنى الطون - احمد أبو النوت - شهد الحايك البوشي