نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الثامنة

عنوان المحاضرة: متسلسلات التوابع الحقيقية

سوف نقوم في هذه المحاضرة بتناول بعض الخواص التي تتمتع بها متتالية التوابع الحقيقية المتقاربة ومن ثم سوف نقوم بحل بعض التمرين على دراسة التقارب كما تعلمنا سابقاً ، ومن ثم سنبدأ ببحث جديد وهو متسلسلات التوابع الحقيقة وتعريف تقاربها

◄ **خواص :** ليكن لينا $\{f_n(x)\},\{g_n(x)\}$ متتاليتي توابع متقاربتين من تابعي النهاية $f(x),g(x)$ على الترتيب على المجال $\mathbb{S}$ عندئذ :

١- تكون المتتالية $\{\boldsymbol{f_n}\ (\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g_n}\ (\boldsymbol{x})\}$ متقاربة من تابع النهاية $f(x)+g(x)$ على $\mathbb{S}$

٢- تكون المتتالية $\{\boldsymbol{f_n}\ (\boldsymbol{x}).\boldsymbol{g_n}\ (\boldsymbol{x})\}$متقاربة من تابع النهاية $f(x).g(x)$على $\mathbb{S}$

٣- تكون المتتالية $\{\boldsymbol{\lambda}\ \boldsymbol{f_n}\ (\boldsymbol{x})\}$ متقاربة من $\boldsymbol{\lambda}.f(x)$ على $\mathbb{S}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$

كذلك تصح الخواص في حال التقارب المنتظم .

مثال :

ادرس تقارب متتالية التوابع التالية من تابع النهاية على المجال المرافق $\mathbb{S}$(تقارب منتظم أو نقطي)

1- $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$ حيث $x\in\mathbb{S}=[0,1]$

لنوجد تابع النهاية :

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}=0$$

حسب المبرهنة 4:

$$\lim_{n\to\infty} sup_{x\in\mathbb{S}}|f_n(x)-f(x)|$$

$$=\lim_{n\to\infty} sup_{x\in\mathbb{S}}\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|$$

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & : x=0\\ \dfrac{1}{2n} & : 0<x<1\\ \dfrac{1}{1+n^2} & : x=1\end{cases}$$

في حالة $0<x=\frac{1}{n}<1 \Leftarrow f_n(x)=\frac{\frac{1}{n}}{1+1}=\frac{1}{2n}$

$$0\le(1-n)^2\Longrightarrow 0\le 1-2n+n^2\Longrightarrow 2n\le 1+n^2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+n^2}\le\frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$$

حسب المبرهنة 4 المتتالية $\{f_n(x)\}$ متقاربة بانتظام من الدالة الصفرية $f(x)=0$ على $\mathbb{S}$

2- $f_n(x)=\frac{n\,x}{1+n^2x^2}$ حيث $x\in\mathbb{S}=[0,1]$

لنوجد تابع النهاية :

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,x}{1+n^2x^2}=0$$

$$\lim_{n\to\infty} sup_{x\in\mathbb{S}}|f_n(x)-f(x)|$$

$$=\lim_{n\to\infty} sup_{x\in\mathbb{S}}\left|\frac{n\,x}{1+n^2x^2}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0$$

فالمتتالية متقاربة نقطياً وليس بانتظام

3- $f_n(x)=\frac{n\,x}{1+n^2x^2}$ حيث $x\in\mathbb{S}=[1,\infty[$

لنوجد تابع النهاية :

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,x}{1+n^2x^2}=0$$

$$\lim_{n\to\infty} sup_{x\in[1,\infty[}\left|\frac{n\,x}{1+n^2x^2}\right|=0$$

توضيح الحدود هي :

$$\frac{x}{1+x^2}, \frac{2x}{1+4x^2}, \frac{3x}{1+9x^2}, \dots \dots, \to 0_{n\to\infty}$$

فالمتتالية متقاربة بانتظام

4- $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$

نأخذ تابع النهاية :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 0$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & : x = 0 \\ \dfrac{1}{1+\frac{1}{b^{2n}}} & : x = \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{2} & : x = 1 \end{cases}$$

$$\underset{n\to\infty}{f_n(x)} \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{2} & x = 1 \end{cases}$$

يعاني انقطاع عند $x = 1$ فالتقارب نقطي على $\mathbb{S}$

◄**تنويه** : إذا كانت حدود المتتالية هي توابع مستمرة على $\mathbb{S}$ وتابع النهاية يعاني انقطاع على $\mathbb{S}$ فالتقارب نقطي وليس منظم .

متسلسلات التوابع

لتكن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حدودها :

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots \dots, f_n(x), \dots \dots$$

نسمي المجموع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع حقيقية معرفة على $\mathbb{S}$ حدها العام $f_n(x)$ نشكل متتالية المجاميع الجزئية $\{s_n(x)\}$ حيث :

$$s_1 = f_1(x), s_2 = f_1(x) + f_2(x), \dots \dots, s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

◄**تعريف** :

نقول عن متسلسلة التوابع الحقيقية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على $\mathbb{S}$ أنها متقاربة (نقطياً) إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية $\{s_n(x)\}$ متقاربة (نقطياً) من المجموع s ونكتب :

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s$$

وتكون المتسلسلة متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$ $\Leftrightarrow$ كانت متتالية المجاميع الجزئية متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$

نتائج:

١-إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{S}$ فإنها متقاربة نقطياً على $\mathbb{S}$.

٢-إذا كانت متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة فإن حدها العام $f_n(x)$ يسعى للصفر عندما $n \to \infty$ أي :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

الإثبات :

$$f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x)$$

والمتسلسلة متقاربة $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}(x) = s - s = 0$$

توضيح :

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x) + f_n(x)$$

$$s_{n-1}(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x)$$

بالطرح : $s_n(x) - s_{n-1}(x) = f_n(x)$

وبالنسبة للنهايات: إن نهاية $s_n(x)$ تساوي نهاية $s_{n-1}(x)$ عند اللانهاية لان$n-1$ و n متساويتان عند اللانهاية .

٣-إذا كان $\lim f_n(x) = 0$ فليس من الضروري أن تكون $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة .

مثال على ذلك : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة .

٤- إذا كان $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq 0$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متباعدة .

٥-إذا حذفنا عدد منته من الحدود في بداية المتسلسلة أو أضفنا عدد منته من الحدود فلا يتغير تقارب المتسلسلة أو تباعدها لكن يتغير المجموع

٦- إذا كانت $\{f_n(x)\}$ متتالية متباعدة فإن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متباعدة

٧- مجموعة القيم x التي تتقارب من أجلها المتسلسلة ندعوها منطقة تقارب المتسلسلة

مثال : حدد منطقة تقارب المتسلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

حيث $x \in \mathbb{R}$ وأوجد مجموعها في حالة تقاربها .

نلاحظ أنها متسلسلة هندسية حدها الأول $a = 1$ وأساسها $r = x$ ومجموعها النوني :

$$s_n(x) = a\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

الشرط اللازم والكافي لتقاربها هو $|x| < 1$ أي $x \in]-1,1[$

ومجموعها :

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{a}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

اما المتسلسلة $|x| < 1$: $\sum_{n=2}^{\infty} x^n$

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^n = x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

مجموع المتسلسلة :

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^2 \left(\underbrace{1 + x + \cdots + x + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n + \cdots}\right) = \frac{1}{1-x}$$

$$= x^2\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x^2}{1-x}$$

نلاحظ أن مجموع المتسلسلة يتغير عند حذف الحدين اللذين دليلهما $(n = 1\,, n = 0)$ أول حدين من المتسلسلة السابقة .

مثال : $\sum_{n=1}^{\infty} nx^2 \;;\quad x \in \mathbb{R}$

نلاحظ أن الحد العام لا يسعى إلى الصفر وذلك من أجل $x \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx^2 = \infty$$

والمتسلسلة متباعدة ولكن عندما $x = 0$ يصبح الحد العام صفراً وبالتالي تكون المتسلسلة المعطاة صفرية ومتقاربة ومجموعها صفر .

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد أنس القزاز – عبد الكريم دباجة – لانا شهاب