◄ دكتور المادة: ريما القمحة

set theory: عنوان المحاضرة ◄المحاضرة: الرابعة

ما زلنا في النص الذي بدأنا في و سنكمل اليوم في عرضه و ترجمته ....

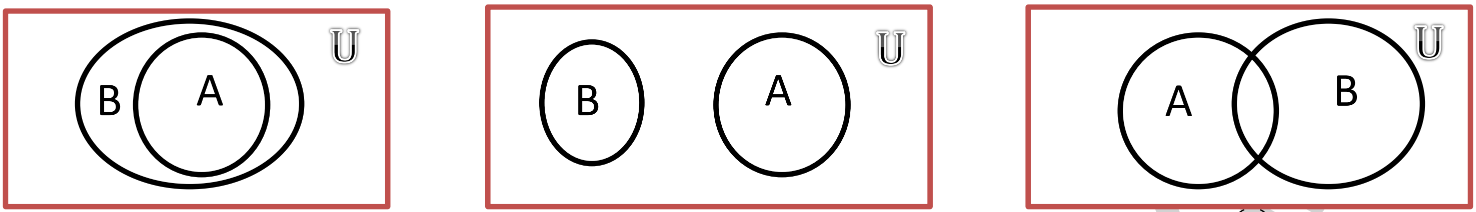
بعض المفردات هامة لفهم النص

Lying	مستلقي – متوضع	Complement	المتمم
Within	داخل	Under consideration	تحت الدراسة
Entirely	بشكل كامل	Particular	قياسي – محدد
Disjoint	منفصل	Illustrate	يوضح
In common	مشترك	Shading	تظليل
Separated	منفصل	Respectively	على الترتيب
Arbitrary	كيفية – لا على التعيين	Shows	يظهر –يبين
Operation	عملية	Inclusion	احتواء
Idempotent	اللانمو	Duality	ثنوية
Associative	التجميع	Various	عديد
Commutative	التبديل	Identities	تعاريف –متطابقات
Distributive	التوزيعية	Satisfy	يحقق
Involution	الالتفاف	Law	قانون
Complement	الاتمام	Method	طريقة
discus	يناقش – مناقشة	Equations	معادلات
Prove	يبرهن – يثبت	Involving	المتضمن
problem	مسألة	Break down	يفصل - يجزئ
Remark	لاحظ – ملاحظة	Cross-hatched	تقاطع خطين
Analogous	المشابهة	Generalize	تعميم
shaded	يظلل – تظليل	Area	منطقة
Strokes	خطوط	Wonder	يتساءل
Direction	اتجاه	Arrange	مرتبة
Pairs	أزواج	Arrangement	ترتيب – تسوية
suppose	نفرض	occurrence	ظهور
Dual-duality	ثنوي - ثنوية		

1.4 VENN DIAGRAMS

A Venn diagram is a pictorial representation of sets by sets of points in the plane. The universal set U is represented by the interior of a rectangle. And the other sets are be entirely within the disk representing B as in Fig 1-1(a) If A and B are disjoint , i.e. have no elements in common , then the disk representing A will be separated from the disk representing B as in Fig 1-1(b).

However , if A and B are tow arbitrary sets , it is possible that some objects are in A but not B , some are in B but not A , some are in both A and B , and some are in neither A nor B ; hence in general we represent A and B as in Fig 1-1(c).



$(a)\ A \subset B$ $\quad$ $(b) A\ and\ B\ are\ disjoin$ $\quad$ (c)

(Fig 1-1)

1.5 SET OPERATIONS

The *union* of two sets A and B, denoted By $A \cup B$, is the set of all elements which belong to A or to B : $\quad A \cup B = \{x : x \in A\ or\ x \in B\}$

Here "or" is used in the sense of and/or.

The *intersection* of two sets A and B , denoted by $A \cap B$, is the set of elements which belong to both A and B : $\quad A \cap B = \{x : x \in A\ and\ x \in B\}$

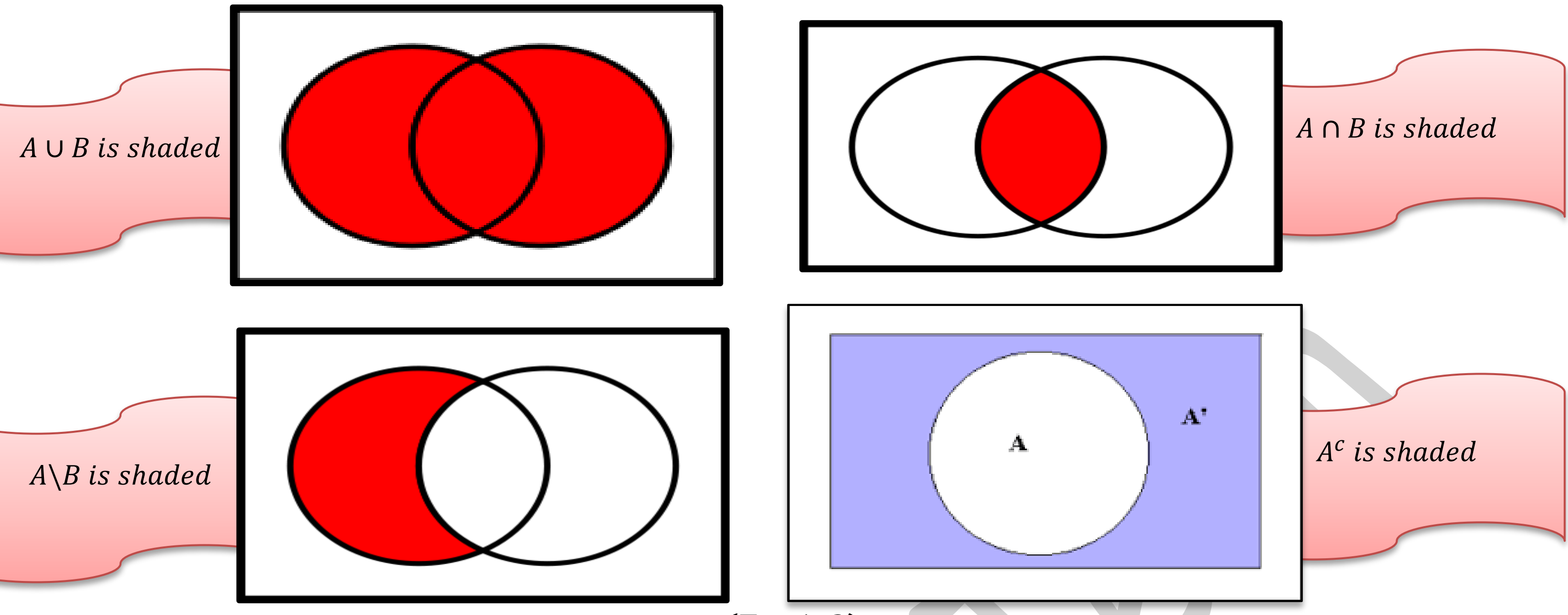
If $A \cap B = \emptyset$, that is , if A and B do not have any elements in common, then A and B are said to be disjoint or nonintersecting.

The relative complement of a set B with respect to a set A of , simply , the difference of A and B , denoted A\B , is the set of elements which belong to A but which do not belong to B : $\quad A\backslash B = \{x : x \in A , x \notin B\}$

The set A\B is read " A minus B" . many texts denote A\B or A-B.

As noted before , all sets under consideration at a particular time are subsets of a fixed universal set U . The absolute complement of , simply , complement of a set A, denoted by A^c , is the set of elements which belong to U but which do not belong to A:

$$A^c = \{x : x \in U , x \notin A\}$$



(Fig 1-2)

That is , A^c is the difference of the universal set U and A . Some texts denote this set by A' . We illustrate the above operations by shading , respectively , the sets $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ and A^c in the venn diagrams in Fig 1-2.

Example 1.3 : Let A={1,2,3,4} and B={3,4,5,6} , where U={1,2,3,4,...} , the set of positive integers Then : $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cap B = \{3,4\}$, $A \backslash B = \{1,2\}$ $A^c = \{5,6,7, \dots\}$

Our next theorem is shows the relationship between set inclusion and operations pf union and intersection .

Theorem 1.2: The following are equivalent : $A \subset B$, $A \cap B = A$, $A \cup B = B$

(Note : this theorem is proved in problem 1,21. Other conditions equivalent to $A \subset B$ are given in problem 1.31)

1.6 ALGEBRA OF SETS, DUALITY

Sets under the above operations satisfy various laws or identities which are listed in table 1.1 In fact we formally state:

Theorem 1.3: sets satisfy the laws in table 1.1

Table 1.1 laws of the algebra of sets

Idempotent Laws	
1a $.A \cup A = A$	$1b. A \cap A = A$
Associative Laws	
2a . $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$2b. (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Commutative Laws	
3a. $A \cup B = B \cup A$	$3b. A \cap B = B \cap A$

Distributive Laws	
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$4b. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identity Laws	
5a.$A \cup \emptyset = A$	$5b. A \cap U = A$
$5c. A \cup U = U$	$5d. A \cap \emptyset = \emptyset$
Involution Law	
$7\ (A^c)^c = A$	
Complement Law	
8a. $A \cup A^c = U$	$8b. A \cap A^c = \emptyset$
9a.$U^c = \emptyset$	$9b. \emptyset^c = U$
Demorgan's Law	
10a . $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$10b. (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

We discuss two methods of proving equations involving set operations . The first is to break down what it means for an object x to be an element of each side, and the second is to use venn diagrams, For example , consider the first of DeMorgan's Laws

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

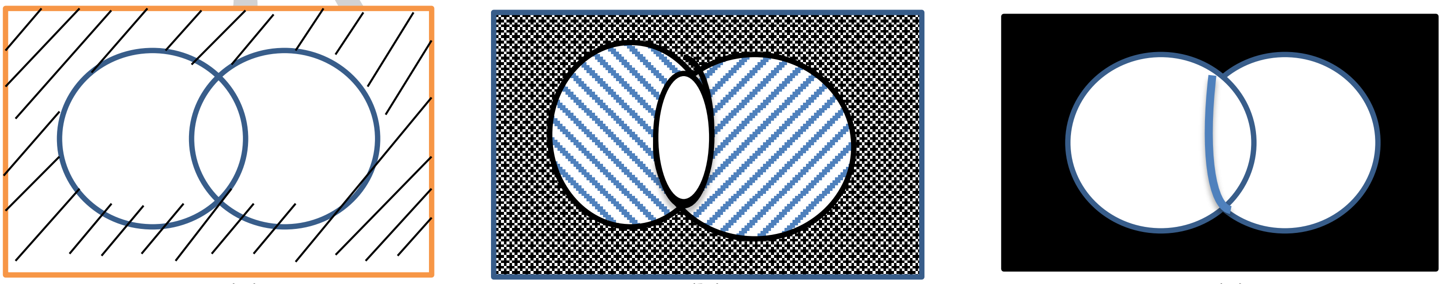
<u>Method1</u>: We first show that $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$. if $x \in (A \cup B)^c$ then $x \notin A \cup B$ thus $x \notin A$ and x $\notin B$ and so $x \in A^c$ *and* $x \in B^c$. Hence $x \in A^c \cap B^c$

Next we show that $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. Let $x \in A^c \cap B^c$ then $x \in A^c$ *and* $x \in B^c$

So $x \notin A$ and x $\notin B$ Hence $x \notin A \cup B$ *so* if $x \in (A \cup B)^c$.

We have proven that every element of $(A \cup B)^c$ belongs to $A^c \cap B^c$ and that every element of $A^c \cap B^c$ *belonge to*$(A \cup B)^c$. Together these inclusions prove that the sets have the same elements , i.e tat $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

<u>Method2:</u> From the venn diagram for $A \cup B$ in Fig 1-2 ,we see that $(A \cup B)^c$ *is* represented by shaded area in Fig 1-3(a). To find $A^c \cap B^c$, the area in both A^c*and* B^cwe shade A^c with strokes in one direction and B^C with another direction as in Fig 1-3(b) . then $A^c \cap B^c$ *is* represented by the cross-hatched area which shaded in Fig1-3(c)
since$(A \cup B)^c$*and* $A^c \cap B^c$ *are represented by the sane area , they are equal*



(a) (b) (c)

Fig1-3

The reader may have wondered why the identities in table 1.1 area arranged in pairs , as , for example , 2a and 2b . we now consider the principle behind this arrangement .

Suppose E us Equation of set algebra . the dual E^* *of* E *is the equation obtained by* replacing each occurrence of $\cup,\cap, U$ and $\emptyset$ *in* E *by* $\cap,\cup,\emptyset,$ *and* U respectively. For example , the dual of $(U\cap A)\cup(B\cap A)=A$ *is* $(\emptyset\cup A)\cap(B\cup A)=A$

Observe that the pairs of laws un table 1.1 are duals of each other . It is fact of set algebra , called the principle of duality , that if any equation E is an identity then its dual E^* is also an identity .

الترجمة

مخطط فين: (من الممكن أن يرد في الامتحان على شكل فراغات كل ما هو مكتوب في خط غامق)

مخطط فين هو تمثيل مصوّر للمجموعات , بواسطة مجموعة من النقاط في المستوي . تُمَثّل المجموعة الشاملة U ضمن المستطيل و تمثل باقي المجموعات من خلال أقراص مسطحة داخل المستطيل إذا كان $A\subset B$ فإن القرص الممثل لـ A سيكون بشكل كامل داخل القرص الممثل للمجموعة B كما في الشكل $1,1(a)$

إذا كانت AوB منفصلتين , هذا يعني أنه لا توجد عناصر مشتركة بينهما عندها القرص الممثل لـ Aسيكون منفصل عن القرص الذي يمثل B كما في الشكل $1,1(b)$

على أية حال , إذا كانت A,B مجموعتين (كيفيتين) , فمن الممكن أن يكون هناك بعض العناصر (الأغراض) الموجودة في A و ليست موجودة في B و بعضها موجود في B و ليس موجود في A و من الممكن أيضاً أن تكون موجودة في كلتا المجموعتين A,B و بعضها غير موجودة لا في A ولا في Bو بالتالي نمثل A و B بشكل عام كما في الشكل 1.1©

العمليات على المجموعات : (هاااااااااامة ☺)

إن اجتماع مجموعتين A,B يرمز له بـ $A\cup B$ ة الذي هو مجموعة كل العناصرالتي تنتمي إلى A أو B

$A\cup B=\{x: x\in A \; or \; x\in B\}$ هنا كلمة $"or"$ تستخدم بمعنى (أو \ و)

إن التقاطع لمجموعتين A,B يرمز له بـ $A\cap B$ و الذي هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى كلتا المجموعتين A,B أي $A\cap B=\{x: x\in A \,\&\, x\in B\}$

إذا كان $A\cap B=\emptyset$ هذا يعني أن A,B لا تملكان أي عناصر مشتركة عندها يثال عن A,B إنهما مجموعتان منفصلتان أو غير متقاطعتان

المتمم النسبي لمجموعة B بالنسبة لمجموعة A أو ببساطة الفرق بين A و B يرمز له بـ $A\backslash B$ و هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي لـ B أي : $A\backslash B=\{x: x\in A\,, x\notin B\}$

تقرأ المجموعة $A\backslash B$ " A ناقص B"

-معظم النصوص ترمز لـ $A\backslash B$ بـ A-B

كما لوحظ سابقاً كل المجموعات التي تكون قيد الدراسة في وقت محدد هي مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة U . المتمم المطلق أو ببساطة متمم مجموعة A و يرمز له بـ A^c و الذي هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى U و لكن لا تنتمي إلى A أي : $A^c = \{x: x \in U \ \& \ x \notin A\}$

إن A^c هي الاختلاف بين المجموعة الشاملة U و المجموعة A .بعض النصوص ترمز لهذه المجموعة بـ 'A إننا نوضح العمليات الموجودة في الأعلى من خلال التظليل على الترتيب كالمجموعات $A \cup B, A \cap B, A^c$ في مخطط فين في الشكل 1.2

مثال 1.3 : لتكن $A = \{1,2,3,4\}, B = \{3,4,5,6\}$ حيث $U = \{1,2,3,4,5,6,7 \dots.\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة, عندئذٍ:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} \quad , A \cap B = \{3,4\} \quad , A \backslash B = \{1,2\} \ \ A^c = \{5,6,7, \dots\}$$

-نظريتنا التالية تبين العلاقة بين احتواء مجموعة و العمليات على الاجتماع و التقاطع

النظرية 1.2 : إن ما يلي متكافئ $A \subset B \ , A \cap B = A \ , A \cup B = B$ (ملاحظة : أثبتت هذه النظرية في المسألة 1,21 و هناك حالت أخرى مكافئة لـ $A \subset B$ معطاة في المسألة 1.31)

1.6 جبر المجموعات و الثنوية :

-المجموعات الموجودة في أسفل العلميات التي في الأعلى , تحقق العديد من القوانين أو المتطابقات المسرودة في الجدول 1.1

في الحقيقة إنها محدد بشكل رسمي .

عد إلى الصفحات 3-4 من محاضرتنا هذه ستجد الجدول و هو في غاية الأهمية

النظرية 1.3 : المجموعات تحقق القوانين في المجموعة 1.1

-سنناقش طريقتين لإثبات المعادلات التي تتضمن العمليات على المجموعات :

الطريقة الأولى : تفصل (تجزّئ) ماذا يعني أن يكون الغرض x عنصراً في كلا الطرفين

الطريقة الثانية : عن طريق استخدام مخططات فين

على سبيل المثال : لنعالج القانون الأول من قوانين دومرغان $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

طريقة 1 : نرى أولاً أن $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$, إذا كان $x \in (A \cup B)^c$ عندئذٍ $x \notin A \cup B$. و لكن $x \notin A , x \notin B$ و أيضاً $x \in A^c \& x \in B^c$ لذلك $x \in A^c \cap B^c$ و بالتالي نرى أنّ : $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$

*إذا كان $x \in A^c \cap B^c$ عندها $x \in A^c \ \ \& x \in B^c$ إذاً $x \notin A \ \ \& x \notin B$ إذاً $x \in (A \cup B)^c$

- لقد أثبتنا أن كل عنصر من $(A \cup B)^c$ ينتمي أيضاً إلى $A^c \cap B^c$ و أيضاً كل عنصر من $A^c \cap B^c$ ينتمي إلى $(A \cup B)^c$

هذا التضمين يبرهن أن هذه المجموعات تمتلك نفس العناصر و هذا يعني أن $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(ملاحظة : ضمنياً يستخدم قانون المنطق المشابه الذي ناقشناه في الفصل *1.1*)

طريقة 2: من خلال مخطط فين و من أجل $A \cup B$ في الشكل *1.2* نرى أن $(A \cup B)^c$ هو ممثل في المنطقة المظللة في الشكل $1.3(a)$

-من أجل إيجاد $A^c \cap B^c$ و المنطقة في A^c و B^c نظلل A^c بخطوط في اتجاه واحد و نظلل B^c بخطوط في الاتجاه المعاكس كما في الشكل $1.3(b)$

-بعد ذلك إن $A^c \cap B^c$ نمثله من خلال تقاطع الخطين في المنطقة المظللة كما في الشكل *1.3(c)*

عد الشكل صفحة 4 من محاضرتنا هذه

بما أن $(A \cup B)^c$ و $A^c \cap B^c$ ممثلتان بنفس المنطقة (المساحة) نجد أنهما متساويتان

قد يتساءل القارئ لماذا التعاريف (القوانين) الموجودة في الجدول رُتِّبت على شكل أزواج على سبيل المثال *1b,2b*

-نناقش الآن المبدأ الذي يكمن خلفه هذا الترتيب :

لنفرض E معادلة جبرية . الثنوية E^* من E هي المعادلة الناتجة عن استبدال ظهر كل من $U,\cap,\cup,\emptyset$ الموجودة في E بـ $\emptyset,\cup,\cap,U$ على الترتيب . على سبيل المثال , الثنوية من $(U \cap A) \cup (B \cap A) = A$ هي $(\emptyset \cup A) \cap (B \cup A) = A$

نلاحظ أن الأزواج من القوانين المرتبة في الجدول *1.1* هي ثنوية لبعضها البعض

-إنها حقيقة في جبر المجموعات تدعى مبدأ الثنوية , ذلك أنه إذا كانت المعادلة E عبارة عن متطابقة عندها تكون ثنويتها المعادلة E^* متطابقة أيضاً .

انتهت المحاضرة

إعداد: سهى العلي – نذير تيناوي – ياسين الحلبي