9-11-2017

نظري

◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة العاشرة عنوان المحاضرة : مجموعة من التمارين

سوف نطرح في هذه المحاضرة مجموعة من التمارين :

تمرين (1) يخطط شخص لقضاء عطلة في إحدى المناطق السياحية a, b, c , ويأخذ بالاختيار كما يلي : يقذف حجر النرد فإذا حصل على عدد زوجي يزور المنطقة a وإذا حصل على عدد فردي يقذف قطعة نقود ويزور المنطقة b إذا حصل على الصورة (H) ويزور المنطقة c إذا حصل على الكتابة (T) .

فإذا علمت أنَّ احتمال هطول المطر في كلِّ المناطق هو على الترتيب : 0.2 , 0.4 , 0.3 , وعندما عاد هذا الشخص وجد الوحل على عجلات سيارته , فما احتمال أنه زار المنطقة a

الحل

بفرض أنَّ : H_1: الحدث الدال على أنَّ الشخص زار المنطقة a .

H_2 : الحدث الدال على أنَّ الشخص زار المنطقة b .

H_3 : الحدث الدال على أنَّ الشخص زار المنطقة c .

نلاحظ أنَّ الأحداث H_1 و H_2 و H_3 تشكل تجزئة لِـ Ω الممثل لزيارة الشخص إحدى المناطق a, b, c :

((يجب التأكد دائماً أنَّ مجموع الاحتمالات تساوي الواحد))

فإذا كان A الحدث الدال على أنَّ نتيجة حجر النرد زوجي فيكون : $\underbrace{P(A)}_{\text{زوجي}} = \underbrace{P(A')}_{\text{فردي}} = \frac{1}{2}$

وبالتالي سيكون : $P(H_1) = P(A) = \frac{1}{2}$

وإذا كان B الحدث الدال على أنَّ نتيجة رمي قطعة النقود صورة فإنَّ : $\underbrace{P(B)}_{\text{صورة}} = \underbrace{P(B')}_{\text{كتابة}} = \frac{1}{2}$

وبالتالي سيكون : $P(H_2) = P(A' \cap B) = P(A').P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

واحتمال أن يزور المنطقة c (وقوع H_3) إذا كان رمي قطعة نقود كتابة أي وقوع B' .

Syria Math Team

$$P(H_3) = P(A' \cap B') = P(A').P(B') = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

للتأكد نلاحظ أنَّ : $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ فهي محققة .

إذا دلَّ D على هطول المطر فإنَّه حسب قاعدة الاحتمال المركب يكون :

$$P(D) = P(H_1).P_{H_1}(D) + P(H_2).P_{H_2}(D) + P(H_3).P_{H_3}(D)$$

حيث أنَّ : $P_{H_1}(D) = 0.3$, $P_{H_2}(D) = 0.4$, $P_{H_3}(D) = 0.2$

وحسب دستور بايز فإنَّ :

$$P_D(H_1) = \frac{P(H_1).P_{H_1}(D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{2}\times 0.3}{0.3} = \frac{1}{2}$$

وهو احتمال زيارة المنطقة a كلما هطلت المطر .

تمرين (2) يوجد في إحدى قاعات التدريب أربعون طالباً من طلاب السنة الأولى احصاء أمرهم الضابط بالخروج إلى الساحة العامة كي يصطفوا على شكل رتل أحادي , فإذا علمت أن أحمد وسعيد طالبان من طلاب هذه المجموعة , والمطلوب :

1) أوجد احتمال أن يكونا متجاوران .
2) إذا علمت أنَّهما متجاوران , فما احتمال أن يكون سعيد في أول الرتل ؟؟
3) إذا علمت أنَّهما متجاوران , فما احتمال أن يكون سعيد في أخر الرتل ؟؟
4) إذا علمت أنهما متجاوران , فما احتمال أن يكون سعيد ليس في أول الرتل ولا في أخره ؟؟

الحل :

1) لدينا ثلاثة حالات أما سعيد في أول الرتل , أو في أخر الرتل , أو بينهما لذلك

بفرض : A_1 يدل على أن سعيد في أول الرتل فيكون : $P(A_1) = \frac{1}{40}$

بفرض : A_2 يدل على أنَّ سعيد في أخر الرتل فيكون : $P(A_2) = \frac{1}{40}$

بفرض : A_3 يدل على أنَّ سعيد ليس في أول الرتل ولا في أخر الرتل

فيكون : $P(A_3) = \frac{38}{40}$

كيس 1	كيس 2
4 بيضاء	3 بيضاء
3 سوداء	5 سوداء
7 كرات	8 كرات

نلاحظ أنَّ : A_1, A_2, A_3 تشكل تجزئة لِ Ω فضاء العينة الدال على اصطفاف سعيد في الرتل حيث أنَّ :

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \frac{38}{40} = \frac{40}{40} = 1$$

نفرض B الحدث الدال على أنَّ أحمد وسعيد متجاوران , فحسب قاعدة الاحتمال المركّب :

$$P(B) = P(A_1).P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B)$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{40}.\frac{1}{39} + \frac{1}{40}.\frac{1}{39} + \frac{38}{40}.\frac{2}{39} = \frac{78}{1560} = \frac{1}{20} = 0.05$$

2) احتمال أذا كانا متجاوران , أن يكون سعيد في أول الرتل وذلك حسب دستور بايز :

$$P_B(A_1) = \frac{P(A_1).P_{A_1}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{40}.\frac{1}{39}}{\frac{78}{1560}} = \frac{1}{78}$$

3) احتمال أذا كانا متجاوران , أن يكون سعيد في أخر الرتل وذلك حسب دستور بايز :

$$P_B(A_2) = \frac{P(A_2).P_{A_2}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{40}.\frac{1}{39}}{\frac{78}{1560}} = \frac{1}{78}$$

4) احتمال أذا كانا متجاوران , أن يكون سعيد ليس في أول الرتل ولا في أخره وذلك حسب دستور بايز :

$$P_B(A_3) = \frac{P(A_3).P_{A_3}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{38}{40}.\frac{2}{39}}{\frac{78}{1560}} = \frac{76}{78}$$

نلاحظ أنَّ : $P_B(A_1) + P_B(A_2) + P_B(A_3) = \frac{1}{78} + \frac{1}{78} + \frac{76}{78} = \frac{78}{78} = 1$

وهذا صحيح لأنَّ $(A_i)_{1\leq i\leq 3}$ تشكل تجزئة لِـ Ω .

تمرين (3)

يحوي كيس 4 كرات بيضاء و3 سوداء , ويحوي كيس آخر 3 كرات بيضاء و5 كرات سوداء , سحبت كرتان من الكيس الأول ووضعتا في الكيس الثاني , سحبت بعد ذلك كرة من الكيس الثاني **والمطلوب :**

1) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء .

2) استنتج من الطلب السابق احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء .

3) إذا علمت أن الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء , فما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من الكيس الأول من لونين مختلفين .

الحل :

بفرض أنَّ :

H_1 الحدث الدال على أنَّ الكرتان المسحوبتان من الكيس 1 بيضاء

Syria Math Team

H_2 الحدث الدال على أنَّ الكرتان المسحوبتان من الكيس 1سوداء

H_3 الحدث الدال على أنَّ الكرتان المسحوبتان من الكيس الأول من لونين مختلفين
فيكون :

$$P(H_1)=\frac{C_2^4}{C_2^7}=\frac{2}{7}\ ,\ P(H_2)=\frac{C_2^3}{C_2^7}=\frac{1}{7}\ ,\ P(H_3)=\frac{C_1^4\times C_1^3}{C_2^7}=\frac{4}{7}$$

نلاحظ أنَّ : $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}+\frac{4}{7}=1$

أي أنَّ H_1, H_2, H_3 تشكّل تجزئة لِـ Ω التي تمثل نتائج سحب كرتين من الكيس الأول .

1) بفرض A الحدث الدال على أنَّ الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء فيكون باستخدام قاعدة الاحتمال
المركب : $P(A)=P(H_1).P_{H_1}(A)+P(H_2).P_{H_2}(A)+P(H_3).P_{H_3}(A)$ حيث أنَّ :

$$P_{H_1}(A)=\frac{C_1^5}{C_1^{10}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\ ,P_{H_2}(A)=\frac{C_1^7}{C_1^{10}}=\frac{7}{10}\ ,P_{H_3}(A)=\frac{C_1^6}{C_1^{10}}=\frac{6}{10}$$

فينتج أنَّ : $P(A)=\frac{2}{7}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{7}\times\frac{7}{10}+\frac{4}{7}\times\frac{6}{10}=\frac{10+7+24}{70}=\frac{41}{70}$

2) B الحدث الدال على أنَّ الكرة المسحوبة بيضاء , فإنَّ :

$$P(B)=1-P(A)=\frac{29}{70}$$

3) حسب دستور بايز فإنَّ : $P_A(H_3)=\frac{P(H_3).P_{H_3}(A)}{\sum_{i=1}^{3}P(H_i).P_{H_i}(A)}=\frac{\frac{4}{7}\times\frac{6}{10}}{\frac{41}{70}}=\frac{24}{41}$

انتهت المحاضرة

الهدف من دون خطة هو
مجرد أمنية , حدد هدفك ..

إعداد: منى شغل**إيناس دليل**نور مهرة

Syria Math Team