نظري

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ المحاضرة : السادسة عشرة

◄ عنوان المحاضرة: المودولات النوثرية والآرتينية

في البداية سنقوم بتذكير ببعض التعاريف المهمة التي ستفيدنا بهذا البحث .

تعاريف : ليكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً:

١) نقول عن العنصر $a \in P$ إنه عنصر **أصغر** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall x \in P ;\ a \leq x$$

٢) نقول عن العنصر $b \in P$ إنه عنصر **أصغري** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall y \in P ; y \leq b \Rightarrow y = b$$

٣) نقول عن العنصر $a \in P$ أنه عنصر **أكبر** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall x \in P : x \leq a$$

٤) نقول عن العنصر $b \in P$ أنه عنصر **أعظمي** في المجموعة P إذا حقق :

$$\forall y \in P , b \leq y \Rightarrow b = y$$

ملاحظة : أي أسرة من المجموعات الجزئية لمجموعة ما تشكل مجموعة مرتبة جزئياً بالنسبة لعلاقة الاحتواء .

والان لنبدأ بمضمون المحاضرة

المودولات النوثرية والآرتينية

تعريف : لتكن M مودول على A عندئذ :

M نوثري $\Leftrightarrow$ لأجل كل سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من M تنقطع أي:

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ \dots\dots$$

فإنه يوجد $r \in \mathbb{N}$ بحيث $M_r = M_i$ من أجل $i \geq r$

M آرتيني $\Leftrightarrow$ لأجل كل متسلسلة متناقصة من المودولات الجزئية من M تنقطع أي:

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ \dots\dots$$

فإنه يوجد $r \in \mathbb{N}$ بحيث $M_r = M_i$ من أجل $i \geq r$

مثال : ليكن لدينا $\mathbb{Z}$ مودول على $\mathbb{Z}$ إن السلسلة $\mathbb{Z} \supseteq 2\mathbb{Z} \supseteq 4\mathbb{Z} \supseteq \ldots$ لاتنقطع ومنه $\mathbb{Z}$ ليس أرتيني.

مبرهنة : ليكن M مودول على A عندئذ :

١) M نوثري $\Leftrightarrow$ M يحقق الشرط الأعظمي أي كل مجموعة غير خالية من المودولات الجزئية من M تملك عنصر اعظمي (بالنسبة لعلاقة الاحتواء).

٢) M آرتيني $\Leftrightarrow$ M يحقق الشرط الأصغري أي كل مجموعة غير خالية من المودولات الجزئية من M تملك عنصر أصغري (بالنسبة لعلاقة الاحتواء).

البرهان :

١) $\Leftarrow$ لنفرض أن M نوثري ولتكن $S = \{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ مجموعة غير خالية من المودولات الجزئية من M والمطلوب اثبات أنها تملك عنصر أعظمي .

ليكن $M_0 \in S$ اذا كان M_0 عنصر أعظمي ل S يتم المطلوب واذا لم يكن عندها يوجد $M_1 \in S$ بحيث $M_0 \subsetneq M_1$ اذا كان M_1 عنصر أعظمي ل S يتم المطلوب واذا لم يكن عندها يوجد $M_2 \in S$ بحيث $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2$ ونتابع هكذا.... حتى نجد $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots$ سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من M ولكن M نوثري اذا فإنه يوجد $r \in \mathbb{N}$ بحيث $M_r = M_i$ من أجل $i \geq r$ وهذا يعني أن M_r عنصر أعظمي ومنه المجموعة S تملك عنصر أعظمي أي أن M يحقق الشرط الأعظمي.

$\Rightarrow$ لنفرض أن M يحقق الشرط الأعظمي ولنثبت أن M نوثري .

لتكن $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \ldots$ سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من M إن $S = \{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ مجموعة غير خالية من المودولات الجزئية من M وحسب الفرض S تملك عنصر أعظمي ولنرمز له ب M_t وبالتالي $M_t = M_i$ من أجل $i \geq t$ ومنه السلسلة السابقة تنقطع أي أن M نوثري .

٢) وظيفة (بنفس الأسلوب) .

مبرهنة : ليكن M مودول على الحلقة A عندئذ :

١) M نوثري فكل مودول جزئي منه نوثري .

٢) M آرتيني فكل مودول جزئي منه آرتيني .

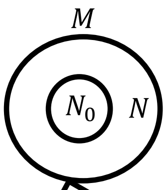
٣) M نوثري و N مودول جزئي من M فإن M/N نوثري .

٤) M آرتيني و N مودول جزئي من M فإن M/N آرتيني .

٥) ليكن N مودول جزئي من M بحيث N نوثري و M/N نوثري فإن M نوثري.

٦) ليكن N مودول جزئي من M بحيث N آرتيني و M/N آرتيني فإن M آرتيني .

البرهان :



توضيح : حسب نتيجة سابقة نجد أن N_0 مودول جزئي من M

١) لنفرض M نوثري وليكن N مودول جزئي من M والمطلوب برهان أن N نوثري .
لدينا $(*) \ldots\ldots N_0 \subseteq N_1 \subseteq$ سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من N
ولنبرهن أنها تثبت عند حد معين(أي تنقطع) .
ومنه $(*)$ سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من M **(حسب التوضيح)**
ولكن M نوثري اذاً $\exists r \in \mathbb{N} \quad : \quad N_r = N_i \quad : \quad i \geq r$
أي السلسلة $(*)$ تنقطع $\Leftarrow$ N نوثري .

٢) وظيفة (بنفس طريقة ١)

٣) لنفرض M نوثري وليكن N مودول جزئي من M والمطلوب برهان أن M/N نوثري .
لتكن $(*) \ldots\ldots V_0 \subseteq V_1 \subseteq$ سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من M/N
ولنبرهن أنها تثبت عند حد معين (أي تنقطع) .
حسب مبرهنة التماثل بين المودولات الجزئية من M/N والمودولات الجزئية من M التي تحوي N نجد ما يلي : أن السلسلة $(*)$ تقابل السلسلة $(**) \ldots\ldots M_0 \subseteq M_1 \subseteq$ وهي سلسلة من المودولات الجزئية من M التي تحوي N بحيث $t \in \mathbb{N}$: $M_t/N = V_t$.
توضيح (إن التماثل يحافظ على الخواص ومنه استخدمنا التماثل السابق حتى نتمكن من ربط السلاسل ببعضها وايضاً شكل المودولات الجزئية من M/N هي M_0/N حيث M_0 مودول جزئي من M يحوي N).
إن السلسلة $(**)$ سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من M ولكن M نوثري اذاً

$\exists r \in \mathbb{N}$ بحيث $M_r = M_i$ من أجل $i \geq r$ ومنه $V_r = M_r/N = M_i/N = V_i$

$$\Rightarrow V_r = V_i \quad : \quad i \geq r$$

ومنه $(*)$ تنقطع .

٤ + ٥) وظيفة .

٦) ليكن N مودول جزئي من M بحيث N ارتيني و M/N ارتيني ولنبرهن أن M ارتيني .

لدينا

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots\ldots S_M$$

سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية من M ولنبرهن أنها تثبت عند حد معين (أي تنقطع) .
إن $M_0 \cap N \supseteq M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq \ldots\ldots S_N$ تشكل سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية من N ولكن N ارتيني اذا

فإنه يوجد $r \in \mathbb{N}$ بحيث $M_r \cap N = M_i \cap N$ من أجل $i \geq r$ والان لنصور السلسلة S_M وفق تشاكل الغمر القانوني π فنحصل على السلسلة المتناقصة من المودولات الجزئية من M/N التالية

$$\pi(M_0) \supseteq \pi(M_1) \supseteq \pi(M_2) \supseteq \ \dots\dots.. S_{M/N}$$

ولكن M/N ارتيني اذاً $\exists t \in \mathbb{N} \ : \ \pi(M_t) = \pi(M_i) \ : i \geq t$

لنفرض أن $k = max(r,t)$ عندها

$$M_k \cap N = M_i \cap N : i \geq k \qquad @$$

$$\pi(M_k) = \pi(M_i) \quad : \ i \geq t \qquad \$$$

نريد اثبات أن S_M تنقطع أي اثبات أن $M_k = M_i \ : \ i \geq k$

من شكل عناصر المتسلسلة S_M نجد أن $\underbrace{M_k \supseteq M_i}_{☺}$

ولنبرهن الاحتواء المعاكس :

ليكن $x \in M_k$ ولنبرهن أن $x \in M_i$

إن

$$x \in M_k \Longrightarrow \pi(x) \in \pi(M_k)$$

$$\Longrightarrow \pi(x) \in \pi(M_k) \underbrace{=}_{\text{حسب } \$} \pi(M_i)$$

$$\Longrightarrow \pi(x) = \pi(y) \quad : \ y \in M_i$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{حسب قاعدة ربط } \pi} x + N = y + N \Longrightarrow x - y \in N$$

وايضاً

$$\underbrace{x}_{\in M_k} - \underbrace{y}_{\in M_i \underbrace{\subseteq}_{\text{حسب } ☺} M_k} \in M_k$$

اذا $x - y \in N$ و $x - y \in M_k$ ومنه $x - y \in M_k \cap N$ ولكن $\underbrace{M_k \cap N = M_i \cap N}_{\text{حسب}@}$ أي أن

$$\Longrightarrow x - y \in M_i \cap N \Longrightarrow x = \underbrace{x - y}_{\in M_i} + \underbrace{y}_{\in M_i} \in M_i$$

ومنه $M_i \supseteq M_k$ وبالتالي من الاحتوائين $M_i = M_k$ من أجل $i \geq k$ أي أن السلسلة S_M تنقطع ومنه M ارتيني .

انتهت المحاضرة

إعداد: لبنى الطون – احمد أبو التوت – شهد الحايك البوشي