◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄ المحاضرة: الثامنة عنوان المحاضرة: الفضاء الجزئي التام

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ الفضاء الجزئي التام

٢ـ مبرهنة التطبيق المستمر

بسم الله الرحمن الرحيم

قد ورد معنا في المحاضرات السابقة (الفضاءات التامة) ورأينا أهميتها وأخذنا أمثلة على فضاءات تامة وأخرى غير تامة ولا بد من الإشارة إلى أنه عندما نحكم على فضاء أنه تام يجب ذكر المترك المعرف على هذا الفضاء. فقد يكون الفضاء تاماً بخصوص مترك معين وغير تام بخصوص مترك اخر.

والأن بمحاضرتنا التي هي عبارة عن مبرهنة في غاية الأهمية .

مبرهنة الفضاء الجزئي التام :

ليكن لدينا (X,d) فضاء متري وليكن لدينا M فضاء جزئي من X عندئذٍ فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء منه M تاماً هو أن تكون M مجموعة مغلقة .

البرهان :

$(\Leftarrow)$ لنفرض أن M فضاء جزئي تام ولنبرهن أن المجموعة M مغلقة

أي نريد إثبات أن $M=\bar{M}$ (وذلك لأن اللصاقة مجموعة مغلقة فإذا أثبتنا المساواة تكون M مغلقة)

لدينا حسب تعريف اللصاقة (هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي M) فإنه لدينا $M\subseteq\bar{M}$

والأن لنثبت الاحتواء الثاني لنأخذ عنصر اختياري من اللصاقة $x\in\bar{M}$ عندئذٍ حسب مبرهنة اللصاقة يكون لدينا المتتالية من عناصر M $(x_n\in M)$ تتقارب من x

$(x\in\bar{M})$ نريد إثبات أن $x\in M$ ، $x\in X$ كون X فضاء كلي وإن تقارب المتتالية x_n يتم بخصوص الطبولوجيا المعرفة على X وكون X تام فإن x_n كوشية وإن خاصية الكوشية هذه تنطبق على M بخصوص نفس الطبولوجيا المعرفة وكون M فضاء تام فرضاً

فإن x_n متقاربة ولها نهاية في M وكذلك لها نهاية في X وكون النهاية وحيدة حسب تعريف التقارب فإن هذا التقارب يتم في M ويكون لدينا $x \in M$ ومنه $\overline{M} \subseteq M$

من الاحتوائين السابقين يكون $\overline{M} = M$ ومنه M مجموعة مغلقة .

$(\Rightarrow)$ إثبات العكس : لنفرض ان M مغلقة

(فكرة البرهان نأخذ متتالية كوشية من M ونثبت أنها متقاربة كي يكون M تام)

لتكن لدينا x_n كوشية في M وكون الفضاء X تام فإن x_n متقاربة من x في X .

ليكن لدينا فرضاً M مجموعة مغلقة فهي تحوي على نقاط تجمعها $\Leftarrow$ $x \in M$ وبالتالي تكون المتتالية $\{x_n\}$ متقارب في M وبالتالي فإننا وجدنا أنه أي كوشية M في متقاربة

$\Leftarrow$ M فضاء تام .

مبرهنة التطبيق المستمر :

تكمن أهمية هذه المبرهنة أننا استطعنا من خلالها استبدال مفاهيم طبولوجية

مثل الجوارات بفضاء متتاليات حيث أن التعامل مع المتتاليات أسهل بكثير ، وتنص هذه المبرهنة على ما يلي :

الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $T: X \to Y$ من فضاء متري (X, d) في فضاء متري $(Y, \tilde{d})$ مستمراً في النقطة x_0 من x هو أن يقتضي الشرط .

$$T \text{ مستمراً عند } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad (if\ \ x_n \longrightarrow x_0 \quad \Longrightarrow \quad Tx_n \longrightarrow Tx_0)$$

البرهان :

$(\Longleftarrow)$ لنفرض أن T مستمراُ عند النقطة $x_0 \in X$ وعلينا إثبات أن إذا كان $x_n \longrightarrow x_0$ فإن $Tx_n \longrightarrow Tx_0$

لدينا كون T مستمراً عند x_0 فإنه

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \exists \delta > 0 \ ; d(x, x_0) < \delta \ \Longrightarrow \tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

وذلك $\forall x \in X$

ولنفرض وجود متتالية اختيارية $x_n \in X$ تسعى إلى x_0 إن هذا التقارب يتم في X عندئذٍ حسب تعريف تقارب متتالية يكون ليدينا

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \exists n_0 \in N \ ; \ n \geq n_0 \ ; \ \ d(x_n, x_0) < \varepsilon \ldots (2)$$

لكن في العلاقة (2) لو استبدلنا ε بـ δ حيث $\delta > 0$ يكون لدينا :

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \exists \delta > 0 \; ; d(x_n, x_0) < \delta \implies \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$$

(اي تحقق لدينا أن المسافة بين عناصر المتتالية x_n اصغر من δ وبالتالي يكون لدينا المسافات بين صور هذه العناصر اصغر من ε

وبالتالي نستطيع أن نكتب :

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \exists n_1 \in N \; ; \; n \geq n_1 \; ; \; \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$$

وهذا تعريفاً هو $Tx_n \longrightarrow Tx_0$ ومنه يتم المطلوب

$(\Longrightarrow)$: لنفرض أن الشرط التالي محقق $x_n \longrightarrow x_0 \Rightarrow Tx_n \longrightarrow Tx_0$ ولنثبت أن T مستمراً .

-لنفرض جدلاً أن T غير مستمر ومنه يكون لدينا

يوجد عدد موجب $\varepsilon > 0$ بحيث انه يقابل كل $\delta > 0$ عنصر x_n مغاير ل x_0 بحيث يحقق $d(x_n, x_0) < \delta$ ويكون في الوقت نفسه $\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$

$$\exists \varepsilon > 0 \; ; \forall \delta > 0 \; ; \exists d(x_n, x_0) < \delta \implies \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$$

باختيار $\delta = \frac{1}{n} \geq 0$ نجد.

$$\exists x_1 \; : \; d(x_1, x_0) < \frac{1}{n} \; ; \; \tilde{d}(Tx_1, Tx_0) \geq \varepsilon$$

$$\exists x_2 \; : \; d(x_2, x_0) < \frac{1}{n} \; ; \; \tilde{d}(Tx_2, Tx_0) \geq \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$\exists x_n \; : \; d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \; ; \; \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$$

وبالتالي يكون لدينا

$$0 \leq d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$$

بأخذ نهاية الأطراف المتراجحة عندما $n \to \infty$ يكون .

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة يكون $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$

أي أن نهايات المسافات بين عناصر المتتالية و x_0 تسعى إلى الصفر فإن حسب الفرض نهايات المسافات بين صور عناصر المتتالية يسعى إلى صورة x_0 أي $Tx_n \longrightarrow Tx_0$

أي أن $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) = 0$

وهذا تناقض لأنه لدينا فرضاً $\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$

ومنه الفرض الجدلي خاطئ أي أن T مستمر وتم المطلوب.

انتهت المحاضرة

إعداد: غفران الربابي –عبد الرحمن اليحش – سماح علوان